
Abgabefrist: Freitag 20.11. um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Summen). (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = -6 + 2^{n+1}(3 - 2n + n^2). \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Aufgabe 2 (Proposition 3.6). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})$ das Distributivgesetz erfüllt:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z}) \quad (x + y)z = xz + yz. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Die Einbettung $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ vertauscht mit Addition und Multiplikation:

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}) \quad \iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b) \ \wedge \ \iota(ab) = \iota(a)\iota(b).$$

Weiterhin ist $\mathbb{Z} = \iota(\mathbb{N}) \cup (-\iota(\mathbb{N}))$ und $\iota(\mathbb{N}) \cap (-\iota(\mathbb{N})) = \{0\}$. (5 Pkt.)

Aufgabe 3 (Lemma 3.11). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \iota(\mathbb{N})$. (5 Pkt.)

(b) Das Paar $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist ein total geordneter K1-Ring. Zur Präzisierung: es wurde bereits früher gezeigt dass $\mathbb{Z}$ ein K1-Ring ist und dass $\leq$ eine totale Ordnung darauf ist, diese Aussagen können also vorausgesetzt werden. (5 Pkt.)

Aufgabe 4 (Definition 3.18). Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d > 0$ definieren wir

$$[(a, b)] \leq [(c, d)] :\iff ad \leq cb.$$

Beweisen Sie, dass diese Relation auf $\mathbb{Q}$ wohldefiniert ist. (5 Pkt.)