Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Abgabefrist: Freitag 27.11. um 12:00 Uhr.
Sie dürfen dieses Übungsblatt (sowie alle nachfolgenden Übungsblätter) in Gruppen von zwei Personen bearbeiten und zusammen abgeben. Bitte stellen Sie in diesem Fall sicher, dass *beide* Namen auf Ihrer Abgabe vermeldet sind.

Aufgabe 1 (K1-Ring)**.** Sei R ein K1-Ring.

(a) Wir definieren $a - b := a + (-b)$. Beweisen Sie für alle $a, b, c \in R$ die folgenden Rechenregeln:

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \qquad (a - b)c = ac - bc. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Sei R nun total geordnet und nullteilerfrei. Beweisen Sie für alle $a, b, c \in R$ die Aussagen

$$ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0), \qquad a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Aufgabe 2 (Körper)**.** (a) Sei $\mathbb{K}$ ein K1-Ring. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (4 Pkt.)

(a.1) $\mathbb{K}$ ist ein Körper;

(a.2) $\mathbb{K}$ hat mit mindestens zwei Elemente, und für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}$.

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein total geordneter Körper (d.h., ein Körper und ein total geordneter K1-Ring). Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{K}$ die folgenden Aussagen: (6 Pkt.)

(b.1) $a < b \implies (\exists c \in \mathbb{K})\, a < c \wedge c < b$.

(b.2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $(a, b \geq 0 \wedge a^n = b^n) \implies a = b$.

(b.3) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $(a, b \geq 0 \wedge a^n > b^n) \implies a > b$.

Aufgabe 3 (Infimum und Supremum)**.** Man bestimme jeweils Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ und untersuche, ob diese Mengen Maximum bzw. Minimum besitzen. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $M_1 := \left\{(-1)^{n+1}(1 + \frac{1}{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; (3 Pkt.)

(b) $M_2 := \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$; (3 Pkt.)

(c) $M_3 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 1 \leq 0\right\}$; (3 Pkt.)

(d) $M_4 := \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 9\right\}$. (3 Pkt.)

Aufgabe 4 (Korollar 4.7)**.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Wir nehmen an dass $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Beweisen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n/b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, auch konvergiert, und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Aufgabe 5 (Konvergenz einer Folge). Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, wobei

$$a_n := \frac{n^2}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mittels zwei Methoden dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

(a) direkt anhand der in der Vorlesung gegebenen Definition der Konvergenz von Folgen. (4 Pkt.)

(b) anhand der Rechenregeln für Grenzwerte und des (aus der Vorlesung bekannten) Grenzwertes von $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. (4 Pkt.)