Prof. M. Rapoport SS 2004

I. Vollaard

Seminar halbeinfache Algebren

Halbeinfache Algebren setzen sich zusammen als Produkte von einfachen Algebren, die wiederum anhand von Schiefkörpern beschrieben werden können. In diesem Seminar werden wir zuerst die Produktdarstellung von halbeinfachen Algebren beweisen und dann für verschiedene Körper die zentralen Schiefkörper bestimmen. Aus der Theorie der halbeinfachen Algebren lässt sich die Theorie der Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums und die Darstellungstheorie endlicher Gruppen folgern. Darüber hinaus hat sie vielfache Anwendung in der Zahlentheorie.

Die Hauptreferenzen das Seminars sind die Bücher von Curtis/Reiner ([CR]) und von Lorenz ([L]), allerdings empfiehlt es sich auch, die jeweiligen Abschnitte in Bourbaki, Algèbre Chap. 8, ([B]) zu lesen.

Vereinbarung:
Alle Ringe in diesem Seminar besitzen ein Einselement. Im Folgenden sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Wir bezeichnen in diesem Seminar mit A_l die Algebra A betrachtet als Linksmodul über sich selbst. Wir werden uns auf den Fall beschränken, dass A_l ein artinscher A-Modul ist.

Bei Fragen wendet Euch an: Inken Vollaard, Be 4 Zi 38, vollaard@math.uni-bonn.de

1. Vortrag: Halbeinfache Moduln

- Wiederholung: Linksmoduln/-ideale von A, zweiseitige Ideale, linksartinsch, Bezeichnung A_l für den R-Linksmodul A, Schiefkörper ([L] Kap. 28.1).
- Bsp.: Sei K ein Körper. Definition K-Algebra, jede endliche K-Algebra ist artinsch ([L] Kap. 28.3).
- Definition der inversen Algebra ([L] 28 Def.2 und F3).
- Definition halbeinfacher und einfacher Moduln ([L] 28 Def.3). Charakterisierung und Definition der Länge von halbeinfachen Moduln ([L] 28 F10 und F19).
- Das Lemma von Schur ([L] 28 F9).
- Dichtesatz ([L] 28 F20).

2. Vortrag: Radikale

- Jedes nicht nilpotente minimale Ideal von A wird von einem idempotenten Element erzeugt ([CR] 24.2 und 25.1).
- Definition des Radikals und halbeinfacher Algebren ([CR] 24.5 und Thm. 24.4). Beachte, dass die Definition des Radikals unabhängig von der Wahl der Linksmoduln bzw. Rechtsmoduln ist.
- Beispiel: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Zu $\varphi \in End_K(V)$ erhalten wir die Jordanzerlegung $\varphi = \varphi_u \circ \varphi_s$, wobei φ_u der unipotente und φ_s der halbeinfache Anteil ist. Betrachte die kommutative K-Algebra $K[\varphi]$. Dann ist
$$rad(K[\varphi]) = (\varphi_u - 1)$$

und die K-Algebra

$$K[\varphi]/rad(K[\varphi]) = K[\varphi_s] \cong \prod_{i=1}^{r} K$$

ist halbeinfach, wobei r der Grad des Minimalpolynoms von φ_s ist.

3. Vortrag: Halbeinfache und einfache Algebren

- Eine artinsche Algebra A ist genau dann halbeinfach, wenn A_l als A-Modul halbeinfach ist ([CR] 25.2).
- Die Algebra A ist halbeinfach gdw. jeder A-Linksmodul halbeinfach ist ([CR] 25.8). Die Zerlegung von A in irreduzible Linksideale von A eindeutig bis auf Reihenfolge (vgl. Vortrag 1).
- Sei A halbeinfach und e ein idempotentes Element. Dann ist Ae ein minimales Linksideal gdw. eAe ein Schiefkörper ist ([CR] 25.11).
- Definition einer einfachen Algebra. Diese ist insbesondere halbeinfach ([CR] 25.14) und ihr Zentrum ist ein Körper ([L] 29 F4). Also ist jede kommutative einfache Algebra ein Körper.

4. Vortrag: Struktursatz halbeinfacher Algebren

- Zwei minimale Linksideale L, L' von A sind genau dann isomorph, wenn $LL' = L'$ ([CR] 25.13).
- Jede halbeinfache Algebra A ist das direkte Produkt einfacher Algebren. Die einzelnen Faktoren heißen die einfachen Bestandteile von A und diese Zerlegung ist eindeutig ([CR] 25.15-25.22).
- Beispiel: Sei D eine Divisionsalgebra (i.e. Schiefkörper), dann ist die Matrixalgebra $M_n(D)$ einfach ([CR] Beginn 26).
- Sei K ein Körper. Eine endlich-dimensionale K-Algebra A heißt absolut halbeinfach, wenn für jede Körpererweiterung L/K die Algebra $A \otimes_L K$ halbeinfach ist.
- Jede kommutative endlich-dimensionale K-Algebra A ist von der Form

  $$A \cong L_1 \times ... \times L_r,$$

  wobei L_i eine endliche Körpererweiterung von K ist ([L] 29 F7). Die Algebra A ist absolut halbeinfach gdw. alle Erweiterungen L_i/K separabel sind.

5. Vortrag: Beispiele

- Jordanzerlegung von Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums ([B] 9).
- Darstellungstheorie endlicher Gruppen ([L] 33.2).

6. Vortrag: Der Satz von Wedderburn

- Satz von Wedderburn: Sei A einfach, dann gilt $A \cong M_n(D)$, wobei D ein Schiefkörper ist ([S] 8.1.5, 8.1.6, vgl. auch [CR] 26 und [L] 29 Satz 3). Dabei ist D eindeutig bis auf Isomorphie und n eindeutig bestimmt als Länge $l_A(A_l)$ ([S] 8.1.9). Hinweis: Benutze die Schreibweise von [L] mit der inversen Algebra.

- Definition und Eigenschaften der Quaternionen ([S] 11, insbesondere 11.8, 11.9). Über den reellen Zahlen gibt es (bis auf Isomorphie) nur die Quaternionenalgebra $(-1,-1)$ und die triviale Quaternionenalgebra $M_2(\mathbb{R})$.

7. Vortrag: Die Brauergruppe

- Zentralisator und Bizentralisator, Definition der Brauergruppe, Beweis der Gruppenstruktur, Skalarerweiterung, Dimension und Schurscher Index ([L] 29 F12 - Satz 9).
- Beispiel: Brauergruppe eines algebraisch abgeschlossenen Körpers ([L] 29 Lemma 1).

8. Vortrag: Zerfällungskörper einfacher Algebren

- Restriktionsabbildung und Zerfällungskörper ([L] 29 F18, F19).
- Satz vom Zentralisator ([L] 29 Satz 14).
- Eigenschaften der Zerfällungskörper ([L] 29 Satz 15 - F22, 29*10).
- Beispiele für Zerfällungskörper: Körpererweiterungen und Quaternionen (vgl. 5. Vortrag).

9. Vortrag: Der Satz von Skolem-Noether

- Der Satz von Skolem-Noether ([L] 29 Satz 20 etc.).
- (Wedderburn) Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper ([L] 29 Satz 21). Folgerungen für die Brauergruppe.

10. Vortrag: Die Brauergruppe von $\mathbb{R}$ und reduzierte Spur und Norm

- Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2. Dann sind die Quaternionenalgebren die einzigen Schiefkörper über K der Dimension 4 mit Zentrum K ([B] 11.2.1 oder [S] 8.6).
- Satz von Frobenius: Die Brauergruppe von $\mathbb{R}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ([B] 11.2.2 oder [S] 8.6).
- Reduzierte Norm und Spur ([L] 29 F23-F26).

11. Vortrag: Schiefkörper über vollständig bewerteten Körpern

- Definition diskreter Bewertungsring, lokaler Körper, Beispiel $\mathbb{Z}_p$, Motivation ([Se] 1.1.1-1.1.3).
- Ganzheitsring und Bewertung eines Schiefkörpers über einem lokalen Körper, Verzweigungsindex, Trägheitsindex ([R] 12-13).

12. Vortrag: Die Brauergruppe eines lokalen Körpers

- Sei K ein lokaler Körper. Dann ist $Br(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ([R] 14 und 31).

Literatur

[B] N. Bourbaki: *Éléments de Mathématique, Algèbre, Chap. 8*, Hermann, Paris (1958)

[CR] C. Curtis, I. Reiner: *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Pure and Applied Mathematics **XI**, Wiley-Interscience Publishers (1962)

[L] F. Lorenz: *Einführung in die Algebra II*, BI-Wissenschaftsverlag (1990)

[R] I. Reiner: *Maximal Orders*, L.M.S. Monographs, Academic press (1975)

[S] W. Scharlau: *Quadratic and Hermitian Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **270**, Springer (1985)

[Se] J.-P. Serre: *Local fields*, Graduate texts in mathematics **67**, Springer (1979)