Prof. Dr. Michael Rapoport
Priv.-Doz. Dr. Ulrich Görtz **WS 2006/07**

Seminar zur Vorlesung über Periodenbereiche

Blatt 18, Vorträge am 18.01.2006

Seien k ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine reduktive algebraische Gruppe über k. Eine Darstellung von G ist ein Morphismus $\rho\colon G \longrightarrow GL(V)$, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Wir sagen auch, V sei ein G-Modul. Existieren keine nicht-trivialen G-stabilen Unterräume, so heißt die Darstellung V irreduzibel. In den folgenden beiden Aufgaben wollen wir aufbauend auf Aufgabe 44 die irreduziblen endlich-dimensionalen Darstellungen von G klassifizieren. Vgl. [Hu] Kapitel 31, insbesondere Prop. 31.2, Thm. 31.3.

Seien B eine Borel-Untergruppe von G und $T \subset B$ ein maximaler Torus. Bezeichne Φ^+ die Menge der positiven Wurzeln. Zu jeder Darstellung V haben wir die Gewichtszerlegung $V = \bigoplus_{\chi \in X^*(T)} V_\chi$ in T-Eigenräume.

Aufgabe 45

a) Sei $\chi \in X^*(T)$ ein Charakter. Ist V eine Darstellung von G, so heißt ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ Höchstgewichtsvektor vom Gewicht χ, falls $v \in V_\chi$ und alle Elemente aus B die von v erzeugte Gerade stabilisieren. Zeige, dass in diesem Fall alle Gewichte des von v erzeugten G-Untermoduls $V' \subseteq V$ die Form $\chi - \sum_{\alpha \in \Phi^+} c_\alpha \alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, haben und dass $\dim V'_\chi = 1$.

b) Zeige ferner, dass in der obigen Situation V' einen eindeutig bestimmten maximalen echten Untermodul hat.

c) Zeige: Ist $\chi \in X^*(T)$ und existiert eine Darstellung von G, die einen Höchstgewichtsvektor vom Gewicht χ besitzt, so ist χ dominant. *Hinweis:* Die Weyl-Gruppe permutiert die Gewichte von V'.

Aufgabe 46

a) Zeige, dass jede irreduzible Darstellung einen Höchstgewichtsvektor besitzt, der bis auf Multiplikation mit einem Element aus $k^\times$ eindeutig bestimmt ist. *Hinweis:* Die Existenz folgt aus dem Borelschen Fixpunktsatz. Für die Eindeutigkeit verwende Aufgabe 45 a).

b) Sei wieder $\chi \in X^*(T)$. Seien V_1 und V_2 irreduzible Darstellungen, die Höchstgewichtsvektoren v_1, v_2 zum Gewicht χ besitzen. Zeige, dass dann V_1 und V_2 isomorph sind. *Hinweis:* Der Vektor $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ ist ein Höchstgewichtsvektor vom Gewicht χ; sei W der davon erzeugte G-Untermodul. Zeige, dass die Projektionen $W \to V_i$, $i = 1, 2$, Isomorphismen sind.

c) Zeige, dass der G-Modul $\Gamma(\chi)$ aus Aufgabe 44 einen Höchstgewichtsvektor vom Gewicht χ besitzt. *Hinweis:* Sei V' ein ein-dimensionaler k-Vektorraum, auf dem B durch χ operiert. Zeige, dass ein B-Modulhomomorphismus $\Gamma(\chi) \longrightarrow V'$

existiert und betrachte dessen Einschränkung auf die Invarianten von $\Gamma(\chi)$ unter dem unipotenten Radikal von B.

d) Folgere, dass die Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen bijektiv den dominanten Charakteren von T entsprechen.

Aufgabe 47

a) Sei $\mathbb{H}$ die Algebra der Hamiltonschen Quaternionen. Erkläre, wie man in natürlicher Weise die Einheitengruppe $\mathbb{H}^\times$ als (die $\mathbb{R}$-wertigen Punkte) einer algebraischen Gruppe G über $\mathbb{R}$ auffassen kann. Zeige, dass der Basiswechsel $G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ isomorph ist zu $GL_{2,\mathbb{C}}$ und gib die zugehörige Operation von $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ auf $G(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})$ an.

b) Seien $n \geq 1$ und E/K eine quadratische Körpererweiterung, $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Sei $\bar{\cdot}$ das nicht-triviale Element der Galois-Gruppe. Zeige, dass der Funktor

$$U(R) = \{g \in GL_n(R \otimes_K E);\ {}^t\overline{g}g = \mathrm{id}\}, \quad R \text{ eine } K\text{-Algebra},$$

eine algebraische Gruppe U über K definiert, und dass $U \otimes_K E \cong GL_{n,E}$. Beschreibe die so gegebene Wirkung von $\mathrm{Gal}(E/K)$ auf $GL_n(E)$ und folgere, dass $U \not\cong GL_{n,K}$.

Literatur

[Hu] J. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer Graduate Texts in Mathematics **21**, 1975.