Einführung in die PDGs

28.06.2019
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 05.07.2019 in der Vorlesung

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Angenommen, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^\top$ und $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^\top$ sind von der Klasse C^2_2 und lösen die Maxwellschen Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{E} = \mathrm{rot}(\mathbf{B}), \quad \partial_t \mathbf{B} = -\mathrm{rot}(\mathbf{E}), \quad \mathrm{div}(\mathbf{E}) = \mathrm{div}(\mathbf{B}) = 0.$$

Zeigen Sie, dass sowohl $\mathbf{E}$ als auch $\mathbf{B}$ die Wellengleichung lösen: $\partial_{tt}\mathbf{E} = \Delta\mathbf{E}$ und $\partial_{tt}\mathbf{B} = \Delta\mathbf{B}$.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Angenommen, $u \in \mathrm{C}^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^d)$ löst das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

Angenommen, g und h seien hinreichend glatt und haben kompakten Träger. Definiere die kinetische bzw. potentielle Energie via

$$k(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(t,x)\,\mathrm{d}x, \quad p(t) := \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie:

(a) $k(t) + p(t)$ ist konstant in t,

(b) $k(t) = p(t)$ für alle groß genugen Zeiten t.

Aufgabe 3: Carleman II **20 Punkte**

(a) Sei $(\tau_j) \subset \mathbb{R}_{>0}$ mit $\tau_j \to \infty$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\| \, |x|^{-\tau_j - \frac{d}{2}} u \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{c}{\tau_j} \| \, |x|^{-\tau_j - \frac{d}{2} + 2} \Delta u \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{für } u \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \tag{3.1}$$

via $v(x) = |x|^{(2-d)/2} u(x)$ folgt aus

$$\|e^{\tau_j t} v\|_{\mathrm{L}^2((0,\infty)\times\mathbb{S}^{d-1})} \leq \frac{c}{\tau_j} \|e^{\widetilde{\tau}_j t}(v_{tt} + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} v - c_d v)\|_{\mathrm{L}^2((0,\infty)\times\mathbb{S}^{d-1})}, \qquad v \in \mathrm{C}^\infty((0,\infty) \times \mathbb{S}^{d-1}) \tag{3.2}$$

für geeignetes $\widetilde{\tau}_j$ und $c_d > 0$. Tipp: Letztes Übungsblatt.

(b) Betrachten Sie nun konkret für ein $v \in \mathcal{H}^n$ (harmonische Polynome der Ordnung n) die Projektion $v_n := \mathbb{P}_n v$ von v auf $\mathcal{H}^n$ vom Grad n auf $\mathbb{S}^{d-1}$, und setzen Sie $w_n := e^{\tau_j t} v_n$. Wie transformiert sich (3.2) in diesem Fall?

(c) Zeigen Sie, dass in der Situation von (b) folgt, dass w_n für gewisse $d_n \in \mathbb{R}$ erfüllt:

$$\|w_n\|_{\mathrm{L}^2} |\tau_j - n|\, |\tau_j + n| \leq c \|(\partial_t + (\tau_j - d_n))(\partial_t + (\tau_j + d_n)) w_n\|_{\mathrm{L}^2}.$$

(d) Wie können Sie aus den Ergebnissen aus (c) Ungleichung (3.1) folgern?