Analysis 3

03.12.2018

PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER

Abgabe: 11.12.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: **(3+3) + 4 = 10 Punkte**

(i) Seien $\Omega_1 := (0,\infty) \times (0,\infty)$ und $\Omega_2 := (1,2) \times (2,3) \times (0,2)$. Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_{\Omega_1} ye^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}^2m(x,y), \qquad \text{(b)} \int_{\Omega_2} \frac{z}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}m^3(x,y,z).$$

(ii) Sei $\Omega_3 = (0,1)\times(0,1)$ sowie $f(x,y) := xy$, $g(x,y) := (x-y^2, x^2y)^\top$ für $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie $g(\Omega)$ in einem zweidimensionalen Koordinatensystem und berechnen Sie

$$\int_{g(\Omega_3)} f(x,y)\,\mathrm{d}m^2(x,y).$$

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)^\top, (0,1)^\top, (1,0)^\top$. Sei nun $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann für $m,n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_D f(x+y)x^m y^n\,\mathrm{d}m^2(x,y) = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\int_0^1 f(t)t^{m+n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & x \geq 0,\ x \leq y < x+1, \\ -1, & x \geq 0,\ x+1 \leq y < x+2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}m^1(x)\,\mathrm{d}m^1(y) \neq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}m^1(y)\,\mathrm{d}m^1(x)$$

und diskutieren Sie dies im Hinblick auf den Satz von Fubini.

Aufgabe 4: **3 + 4 + 3 = 10 Punkte**

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f \in L^1(\Omega,\mu)$ nicht-negativ.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\nu\colon \Sigma \ni A \mapsto \int_A f\,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$

ein Maß definiert wird. Wir sagen dann, dass ν bezüglich μ die *Dichte* f hat.

(b) Seien nun μ_1, μ_2 zwei endliche Maße auf $\mathbb{R}^d$, die bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes m^d die Dichte f_1 bzw. f_2 besitzen. Sei weiters $\mu_1 * \mu_2$ das Bildmaß von $\mu_1 \times \mu_2$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ bezüglich $g\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \ni (x,y)^\top \mapsto x + y \in \mathbb{R}^d$, d.h., $\mu_1 * \mu_2(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(g^{-1}(A))$ für m^d-messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$. Bestimmen Sie mit Beweis die Dichte von $\mu_1 * \mu_2$ bezüglich des d-dimensionalen Lebesguemaßes.

(c) Sei nun $\mu = \mu_1 = \mu_2$, wobei μ_1 dasjenige Maß auf $\mathbb{R}$ mit

$$\mu_1(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2}} \,\mathrm{d}m(x), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ist. Bestimmen Sie explizit die Dichte von $\mu * \mu$ bezüglich des eindimensionalen Lebesguemaßes m auf $\mathbb{R}$.