Aufgabe 1 (Logik)**.** Seien A, B, C beliebige Aussagen.

(a) (Äquivalenzbeweis) Beweisen Sie, dass die Aussagen $A \Leftrightarrow B$ und $\big(A \Rightarrow B \land B \Rightarrow A\big)$ äquivalent sind.

(b) Beweisen Sie, dass die Aussagen $A \lor B$ und $(\neg A) \Rightarrow B$ äquivalent sind.

(c) (Widerspruchsbeweis) Beweisen Sie dass die Aussagen A und $(\neg A) \Rightarrow \perp$ äquivalent sind.

(d) (Syllogismus) Zeigen Sie
$$[(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)] \Rightarrow [A \Rightarrow C]$$

(e) (modus ponens, Implikationsbeseitigung) Vergewissern Sie sich dass Sie die in der VL besprochene Implikation
$$[A \land (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$$
durchschauen.

(f) (Kontraposition) Gleiches für
$$[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [\neg B \Rightarrow \neg A].$$

(g) (Implikation ist nicht assoziativ) Zeigen Sie dass die Aussagen
$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \quad \text{und} \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$
nicht äquivalent sind.

Aufgabe 2 (Peano-Axiome)**.** (a) Definieren Sie auf $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ eine Abbildung S so, dass alle Peano-Axiome außer PInd erfüllt sind.

(b) Das Tripel $(\mathbb{N}, 0, S)$ erfülle die Peano-Axiome. Beweisen Sie die Gleichheit $\{0\} \cup S(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Hier definieren wir für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die *Bildmenge*
$$S(A) := \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m \in A)\ S(m) = n\}.$$

(c) Sei $(M, \varnothing, T)$ das Tripel gegeben durch
$$M := \mathcal{P}(\mathbb{N}), \qquad \varnothing := \{\}, \qquad T(A) := S(A).$$
Zeigen Sie welche Peano-Axiome $(M, \varnothing, T)$ erfüllt, und welche nicht.

(d) Sei $M := \{m \in \mathbb{N} \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ m = 2^n\}$. Ergänzen Sie M zu einem Tripel das die Peano-Axiome erfüllt.

Aufgabe 3 (Induktion: suche den Fehler!)**.**
Behauptung: Sei A eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x, y \in A$ dass $x = y$.
Beweis: Sei $n + 1$ die Anzahl von Elementen in A. Wir benutzen Induktion nach n.
IA: Für $n = 0$ gilt $(\forall x, y \in A = \{a\})\ x = a = y$.
IS: Wir nehmen an dass die Behauptung stimmt für $n \in \mathbb{N}$. Sei $A = \{a_0, \dots, a_n\}$. Die Teilmengen $A_0 := \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ und $A_n := \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ haben jeweils n Elementen, Aus der Induktionshypothese folgt dann $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ und $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$ und deshalb auch $a_0 = a_1 = \dots = a_n$.

Aufgabe 4 (Multiplikation)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a)
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ n0 = 0. \tag{$\cdot 0$}$$

(b)
$$(\forall n, m \in \mathbb{N})\ nS(m) = nm + n. \tag{$\cdot S$}$$

Aufgabe 5 (Ordnung)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Ordnung der natürlichen Zahlen ist *reflexiv*:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ n \leq n.$$

(b) Die Ordnung der natürlichen Zahlen ist *antisymmetrisch*:

$$(\forall n, m \in \mathbb{N})\ \big(n \leq m \wedge m \leq n\big) \Longrightarrow n = m.$$

Aufgabe 6 (Lemma 2.10, Charakterisierung der geordneten Paare)**.** Beweisen Sie:

$$(\forall x, y, x', y')\big((x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')\big).$$

Bemerkung: das Problem mit der Lösung 2 ist nur dass wir $\cap\mathcal{F}$ (für eine Menge $\mathcal{F}$ deren Elementen ebenfalls Mengen sind) nicht definiert haben...