Aufgabe 1 (Limes inferior und Limes superior). Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Falls $a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \to a$, dann gilt die Gleichheit

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(c) Es gelten die Ungleichungen

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \le \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j\right) \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Aufgabe 2 (Konvergenz). (a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a.1) Wenn $b_n \to 0$ und $a_n b_n \to 0$, dann ist a_n beschränkt.

(a.2) Wenn $a_n \to a^*$, dann $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j \to a^*$.

(a.3) Wenn $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} a_j \to a^*$, dann $a_n \to a^*$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ an, so dass der entsprechende Fall eintritt. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(b.1) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

(b.2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.

(b.3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

Aufgabe 3 (Konvergenz und Grenzwerte). Entscheiden Sie für folgende Folgen in $\mathbb{R}$, ob sie konvergieren, und bestimmen Sie wenn ja den Grenzwert. Beweisen Sie Ihr Resultat.

(a) $a_n := \frac{n^3+3}{n^2-5}$.

(b) $b_n := \frac{n^4+3n^2}{5n^4-9n^3+7n}$.

(c) $c_n := x^n$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) $d_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 4 (Konvergenz und Differenz). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $b_n := a_{n+1} - a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

(b) Wenn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert, dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 5 (Monotone Konvergenz). Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ rekursiv durch

$$a_0 := \frac{1}{4}, \qquad a_{n+1} := a_n^2 + \frac{1}{4},\ n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Schlussfolgern Sie daraus die Konvergenz der Folge und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 6 (Konvergenz auf $\bar{\mathbb{R}}$). Beweisen Sie, dass die Definition der Konvergenz auf $\bar{\mathbb{R}}$ in Abschnitt 4.3 und die Definition der Konvergenz in metrischen Räumen (wobei $\bar{\mathbb{R}}$ die im Skript beschriebenen Metrik hat) übereinstimmen.

Aufgabe 7 (Cauchyfolgen). Sei (M, d) ein metrischer Raum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M, und sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M so, dass für alle $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(a_N, a_m) \leq \epsilon$ für alle $m \geq 2N$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M so, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ beide gegen a konvergieren. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M so, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M mit einer konvergenten Teilfolge. Dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.