Aufgabe 1 (Metrische Räume). (a) Sei (M, d) ein metrischer Raum, und sei $d_1 : M \times M \to \mathbb{R}$ durch $d_1(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$ definiert. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: d_1 *ist eine Metrik auf* M.

(b) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Finden Sie zwei Metriken auf $X \times Y$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y und alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y) \iff \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y\right).$$

Aufgabe 2 (Komplexe Konjugation). Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ werden die *komplexe Konjugation* und der *Betrag* definiert durch

$$\overline{z} = \overline{x + iy} := x - iy, \qquad |z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(a) Zeigen Sie dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Rechenregeln gelten:

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}, \quad \Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \quad |z|^2 = z\overline{z}.$$

(b) Sei $z := 1 - 2i$. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^2 und $1/z$ sowie $|z|$.

Aufgabe 3 (Komplexe Lösungen). (a) Finden Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen. Wieso gibt es keine anderen Lösungen?

(a.1) $z^2 = 1$.

(a.2) $z^2 = -1$.

(a.3) $z^4 = 1$.

(b) In der komplexen Ebene wird $\Re z$ auf der x-Achse und $\Im z$ auf der y-Achse aufgetragen. Skizzieren Sie die Lösungen aus (a) in der komplexen Ebene.

Aufgabe 4 (Reihenkonvergenz). Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir nehmen an dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergiert. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ auch konvergiert.