Aufgabe 1. Beweisen Sie dass $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x} = 1$ für alle reelle Zahlen $x > 0$.

Aufgabe 2 (Bernoulli-Ungleichung)**.** Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. In dieser Aufgabe verallgemeinern wir die Bernoulli-Ungleichung (Lemma 4.14) auf rationale Exponenten.

(a) Sei $q = n/m$, wobei $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $n \leq m$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(1 + x)^q \leq 1 + qx.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Präsenzblatt 3, Aufgabe 1).

(b) Sei $q \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$(1 + x)^q \geq 1 + qx.$$

Aufgabe 3 ((Absolute) Konvergenz von Reihen)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gelte zusätzlich $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum_n a_n$.

(b) Es gelte zusätzlich $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_n a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$.

(c) Die Reihe $\sum_n \frac{1}{n^2+|a_n|}$ konvergiert absolut.

(d) Die Reihe $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+|a_n|}$ konvergiert absolut.

Aufgabe 4 (Konvergenz von Reihen)**.** Untersuchen Sie die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz mithilfe von den Kriterien aus Abschnitt 6.2.

(a) $\sum_k \frac{1}{1+k+(-1)^k}$.

(b) $\sum_k \frac{3+k}{3^k}$.

(c) $\sum_k \frac{(k^k)^2}{k^{k^2}}$.

(d) $\sum_k \frac{(2k)!}{(k!)^2}$.

(e) $\sum_k \left(\frac{k^2+1}{5k+6k^2}\right)^{5k}$.