Zur Info: Das Übungsblatt 8 (Abgabefrist: Freitag 8.1.) wird erst am 23.12. veröffentlicht.

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen). Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen in $\mathbb{C}$ konvergieren:

(a) $\sum_k \frac{(-1)^k(k-2)}{k^2}$.

(b) $\sum_k \frac{i^k}{k}$.

Aufgabe 2 ((Absolute) Konvergenz von Reihen). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $\sum_n a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_n a_n^2$.

(b) Falls $\sum_n a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_n a_n^2$ absolut.

Aufgabe 3 (Umordnung von Reihen). (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_n (-1)^{n+1} 1/n$ konvergiert, und dass

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

(b) Wir betrachten nun diejenige Umordnung der Reihe aus Teilaufgabe (a), bei der auf je ein positives zwei negative Folgeglieder folgen:

$$u := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Zeigen Sie dass $u = s/2$.

(c) Schlussfolgern Sie $u \neq s$, und besprechen Sie wieso dies den Umordnungssatz (Korollar 6.28) nicht widerspricht.

Aufgabe 4 (Unstetige Funktion). (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Das heißt, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$.

(b) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion $1_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ in keinem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 5 (Stetigkeit und Supremum). Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : X \to [0, 1]$ eine stetige Funktion. Ist dann auch $h(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ eine stetige Funktion? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

Ankündigung der Fachschaft: Am 22. Dezember 2020 um 19:15 findet ein Treffen für die Mathe-Lehramtsstudierenden auf Zoom statt. Die Zugangsdaten findet ihr auf der Fachschaftswebsite (`www.fsmath.uni-bonn.de`). Wir sind gespannt auf eure Erfahrungen und Eindrücke! Bitte erscheint zahlreich, damit wir viel Rückmeldung bekommen, um das Studium für kommende Generationen zu optimieren.