Aufgabe 1 (Quantoren). Seien X, Y metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Bestimmen Sie für jede Aussage (a) bis (d) die dazu äquivalente Aussage (i) bis (iv).

(a) f ist stetig.

(b) f ist gleichmäßig stetig.

(c) f ist beschränkt, d.h., es gibt $y_0 \in Y$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$ so dass $d_Y(y_0, f(x)) < R$ für alle $x \in X$.

(d) f ist konstant.

(i) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall a \in X)(\forall x \in X)\ d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$

(ii) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall a \in X)(\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in X)\ d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$

(iii) $(\exists \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall a \in X)(\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in X)\ d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$

(iv) $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{>0})(\forall a \in X)(\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0})(\forall x \in X)\ d_X(a, x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon.$

Aufgabe 2 (Stetigkeit). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeden ihrer Werte genau zweimal annimmt.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Dann besitzt f ein endliches Maximum.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Dann ist f beschränkt und besitzt ein endliches Maximum oder ein endliches Minimum. Weiterhin ist f gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3 (Exponentialfunktion und Logarithmus). In dieser Aufgabe zeigen wir, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenz, und dass der Logarithmus langsamer wächst als jede (positive) Potenz.

(a) Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^\alpha} = \infty.$$

(b) Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Aufgabe 4 (Inneres, Abschluss, Rand). Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) In $\mathbb{R}$ gilt $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$.

(b) Der Rand ∂A ist abgeschlossen und

$$\partial A = \{x \in X \mid (\forall \epsilon > 0)\ B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(x) \cap A^\complement \neq \emptyset\}.$$

Aufgabe 5 (Inneres, Abschluss, Rand). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A_j \subseteq X$ für $j \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie

(a) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$

(b) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{A_j}$

(c) $\partial\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\partial A_j)$.