Aufgabe 1 (Differenzenquotienten als Ableitungen). Sei $f(x) = x(x-1)(x-2)$.

(a) Finden Sie alle $a \in [-2, 2]$, für die $f'(a) = \frac{1}{4}\big(f(2) - f(-2)\big)$ gilt.

(b) Finden Sie alle $a \in [0, 4]$, für die $f'(a) = \frac{1}{4}\big(f(4) - f(0)\big)$ gilt.

Aufgabe 2 (Mittelwertsatz). Sei $f\colon [0,1] \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion, die auf $(0,1)$ differenzierbar ist und überdies $f(0) = 1$ sowie $f(1) = e = \exp(1)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass ein $a \in (0,1)$ mit $f(a) = f'(a)$ existiert.

Aufgabe 3 (L'Hôpital-Regel). Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos x + \frac{3}{2}x^2}{x^4}$.

(c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Aufgabe 4. Sei $f\colon [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} -(\sin x)^2, & x \in [-\pi/2, 0), \\ (\sin x)^2, & x \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist differenzierbar auf $(-\pi/2, \pi/2)$.

Hinweis: Für die Differenzierbarkeit im kritischen Punkt $x = 0$, zeigen Sie zuerst $\lim_{h\to 0}(\sin h)/h = 1$.

(b) f ist streng monoton.

(c) f ist bijektiv.

(d) $f'(0) = 0$, aber f hat kein lokales Extremum in 0.

Aufgabe 5 (Ableitungen). Bestimmen Sie die Ableitungen der nachfolgenden Funktionen $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.

(a) $\tan x := (\sin x)/(\cos x)$.

(b) x^a für $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\sin x \ln x$.

(d) $\exp(\cos x)$.

(e) $(x^x)^x$.

(f) $\ln(f(x))$ für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$.