Aufgabe 1 (Eine glatte Funktion). Sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \in (-1,1).$$

Begründen Sie, dass f beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie mit Beweis einen geschlossenen Ausdruck für die n-te Ableitung der Funktion f, mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. (5 Pkt.)

Aufgabe 2 (Zweite Ableitungen).

(a) Sei $a < b$, und sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Beweisen Sie, dass für alle $x \in (a,b)$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Hinweis: Benutzen Sie die l'Hôpital-Regel.

(b) Wir betrachten nun die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie dass für alle $x \in (a,b)$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

in $\mathbb{R}$ existiert, aber dass f nicht (überall) zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 3 (Integration). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig und $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit f^2 integrierbar. Dann ist auch f integrierbar.