Aufgabe 1 (Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel). In dieser Aufgabe beweisen wir für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle positiven reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n \geq 0$, dass

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \geq \prod_{k=1}^{n} a_k. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Zahlen $a_1, \dots, a_n > 0$ existieren, so dass

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

(b) Zeigen Sie die Ungleichung (1) für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$.

(c) Zeigen Sie die Ungleichung (1) für den Fall $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie die Ungleichung (1) für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Lösung. (a) Nehmen wir $a_j := a > 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, so folgt

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n = a^n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

(b) Der Fall $n = 1$ ist klar. Für den Fall $n = 2$ betrachten wir den Term $(a_1 - a_2)^2$ und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \geq 0 &\implies a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \geq 4a_1a_2 \\ &\implies \left(\frac{1}{2}(a_1 + a_2)\right)^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2) \geq a_1a_2. \end{aligned}$$

(c) Wir benutzen Induktion nach $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. <u>IA</u> ist Teilaufgabe (b).

<u>IS</u>:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{2^{k+1}} a_j &= \left(\prod_{j=1}^{2^k} a_j\right)\left(\prod_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j\right) \\ &\overset{\text{IH}}{\leq} \left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} a_j\right)^{2^k} \left(\frac{1}{2^k}\prod_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j\right)^{2^k} \\ &= \left(\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} a_j\right)\left(\frac{1}{2^k}\prod_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j\right)\right)^{2^k} \\ &\overset{\text{(b)}}{\leq} \left(\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} a_j + \frac{1}{2^k}\prod_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} a_j\right)\right)^2\right)^{2^k} \\ &= \left(\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{2^{k+1}} a_j\right)^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

(d) Sei $2^{k-1} < n < 2^k$, und definiere $a_l := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j$ für $n+1 \leq l \leq 2^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{2^k} a_j &\overset{\text{(c)}}{\leq} \left(\frac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k} a_j\right)^{2^k} \\
&= \left(\frac{1}{2^k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{l=n+1}^{2^k} a_l\right)\right)^{2^k} \\
&= \left(\frac{1}{2^k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{2^k-n}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\right)^{2^k} \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{2^k} \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{2^k-n} \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{n}\prod_{l=n+1}^{2^k} a_l.
\end{aligned}$$

Im Fall $\prod_{l=n+1}^{2^k} a_l = 0$ ist die gewünschte Ungleichung schon klar. Nehmen wir nun also an dass $\prod_{l=n+1}^{2^k} a_l \neq 0$, dann können wir durch $\prod_{l=n+1}^{2^k} a_l$ teilen und so folgt

$$\prod_{j=1}^{n} a_j = \frac{\prod_{j=1}^{2^k} a_j}{\prod_{l=n+1}^{2^k} a_l} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^{n}.$$

□

Aufgabe 2 (K1-Ring)**.** Sei R ein K1-Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $a, b \in R$ gelten die folgenden Rechenregeln:

$$-(-a) = a, \qquad (-a) + (-b) = -(a+b), \qquad a(-b) = -(ab).$$

(b) Ist $1 = 0$, dann hat R nur ein Element.

(c) Ist R total geordnet, dann gelten für alle $a, b \in R$:

$$a \leq b \implies -b \leq -a, \qquad a < b \implies -b < -a.$$

Lösung. (a) Die Rechenregeln folgen aus:

$$\begin{gathered}
a + (-a) = 0, \\
(a+b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0, \\
ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0.
\end{gathered}$$

(b) Für alle $a \in R$ gilt dann $a = a1 = 1a = 0a = 0$, und deshalb ist $R = \{0\}$.

(c)
$$a \le b \implies 0 \le b - a \implies 0 \le -a - (-b) \implies -b \le -a.$$
Die Implikation $a < b \implies -b < -a$ folgt dann wegen $a = b \iff -b = -a$. □

Aufgabe 3 (Infimum und Supremum)**.** Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist A nach oben beschränkt, dann ist
$$-A := \{-x \mid x \in A\}$$
nach unten beschränkt, und $\inf(-A) = -\sup A$.

(b) Sind A und B nach oben beschränkt, dann ist auch
$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$
nach oben beschränkt, und $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

(c) Sind A und B beschränkt (d.h., nach oben beschränkt *und* nach unten beschränkt), dann ist auch
$$A \cdot B := \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$
beschränkt, und es gilt
$$\sup A \cdot \sup B \le \sup(A \cdot B).$$

(d) Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen je nichtleere beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $\inf A < \sup A$ und $\inf B < \sup B$ an, so dass der entsprechende Fall eintritt.

(d.1) $\sup A \cdot \sup B = \sup(A \cdot B)$;
(d.2) $\sup A \cdot \inf B = \sup(A \cdot B)$;
(d.3) $\inf A \cdot \inf B = \sup(A \cdot B)$.

Lösung. (a) Wir benutzen Aufgabe 2(c): es gilt $-\sup A \le -x$ für alle $-x \in -A$, also $-A$ ist von unten beschränkt. Weiterhin gilt für $y \in \mathbb{R}$:
$$(\forall -x \in -A)\ y \le -x \implies (\forall x \in A)\ x \le -y \implies \sup A \le -y \implies y \le -\sup A,$$
also $-\sup A$ ist das Infimum.

(b) Ähnlich wie Teilaufgabe (a), aber nun benutzen wir Definition 3.10.(i).

(c) Diesmal benutzen wir Definition 3.10.(ii). Wir müssen jetzt aber die Vorzeichen beachten! Im Fall $A \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $B \subset \mathbb{R}_{\ge 0}$ zeigt man $\sup A \cdot \sup B = \sup(A \cdot B)$. Im Allgemeinen gilt
$$\sup(A \cdot B) = \max\big(\sup A \cdot \sup B, \sup A \cdot \inf B, \inf A \cdot \sup B, \inf A \cdot \inf B\big).$$
Hieraus folgt dass die gewünschte Ungleichung und dass $A \cdot B$ von oben beschränkt ist. Ebenso zeigt man auch dass $A \cdot B$ von unten beschränkt ist.

(d) Zum Beispiel:

(d.1) $A = B = \{0, 1\}$.
(d.2) $A = \{-2, -1\}$ und $B = \{1, 2\}$.

(d.3) $A = B = \{-1, 0\}$. $\square$

Aufgabe 4 (Konvergenz – Definition)**.** Diskutieren Sie für jede der folgenden Aussagen, wieso sie *nicht* äquivalent zu der in der Vorlesung definierten Aussage '$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert' sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung durch ein Gegenbeispiel.

(a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ für welches es wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

(b) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, für welches es wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$.

(c) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq n_0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

(d) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

(e) Es existiert kein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a| > \varepsilon$.

Schließlich: was denken Sie von der folgenden Aussage?

(f) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert kein $\varepsilon > 0$ so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ existiert mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Lösung. Die Folge $a_n = (-1)^n$ erfüllt die Aussagen (a) bis (d), aber konvergiert natürlich nicht. Für eine konvergente Folge (a_n) ist die Aussage (e) falsch (z.B., $a := 1 + \lim a_n$ erfüllt die genannte Eigenschaft). Die Aussage (f) ist äquivalent zu Konvergenz:

$$\begin{aligned} &\neg(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0)\ |a_n - a| \geq \varepsilon \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)\neg(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0)\ |a_n - a| \geq \varepsilon \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\neg(\exists n \geq n_0)\ |a_n - a| \geq \varepsilon \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ob in (f) $\geq \epsilon$ oder $> \epsilon$ steht ist egal. Aus der zweiten Aussage kann man sofort auf die erste schließen, und aus der ersten auf die zweite indem man die erste mit $\epsilon/2$ anstellen von ϵ anwendet.
Es gilt übrigens folgendes:

- (a) und (b) sind äquivalent und bedeuten '$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt';
- (c) und (d) sind äquivalent und bedeuten '$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat ein Häufungspunkt';
- (e) bedeutet '$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert zu *jedem* a' und ist Unsinn... $\square$

Aufgabe 5. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n - b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, auch konvergiert, und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Lösung. Wir schreiben $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Es gilt $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = -b$: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|(-b_n) - (-b)| = |b_n - b| < \varepsilon$. Aus Lemma 4.9.(i) folgt dann

$$a - b = a + (-b) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-b_n) \overset{4.9.(i)}{=} \lim_{n\to\infty} \big(a_n + (-b_n)\big) = \lim_{n\to\infty} c_n. \qquad \square$$