Abgabefrist: Freitag 4.12. um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (k-te Wurzeln)**.** Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Verallgemeinern Sie die Methode von Lemma 3.33, um zu beweisen dass eine eindeutige Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ existiert sodass $b^k = a$. (Wir schreiben $\sqrt[k]{a} = a^{1/k} = b$ und nennen b die k-te Wurzel von a.) (5 Pkt.)

Aufgabe 2 (Rationale Potenze)**.** Sei $0 < a \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenz a^n definiert (siehe Präsenzblatt 2, Aufgabe 6(a)). Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ und $a \neq 0$ definieren wir $a^m := (a^{-1})^{-m}$. Sie dürfen in dieser Aufgabe die Rechenregeln $a^{m+m'} = a^m a^{m'}$, $(a^m)^{m'} = a^{mm'}$, und $(ab)^m = a^m b^m$ für $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $m, m' \in \mathbb{Z}$ benutzen.
Sei nun $q = m/n$ eine rationale Zahl mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ definieren wir

$$a^q := \sqrt[n]{a^m}.$$

(a) Beweisen Sie dass a^q wohldefiniert ist. (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass $a^q = \sqrt[n]{a}^{\,m}$. (2 Pkt.)

(c) Beweisen Sie für beliebige $p, q \in \mathbb{Q}$ die Rechenregel $a^{p+q} = a^p a^q$. (3 Pkt.)

Aufgabe 3 (Konvergenz von Potenz- und Wurzelfunktionen)**.** Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $0 < q \in \mathbb{Q}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = a^k$. (2 Pkt.)

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{1/k} = a^{1/k}$. (5 Pkt.)

(c) $\lim_{n\to\infty}(a_n)^q = a^q$. (2 Pkt.)

Aufgabe 4 (Monotone Konvergenz)**.** Sei $0 < c \in \mathbb{R}$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge in $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := \sqrt{c + a_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe die Lösungsformel (a-b-c-Formel) für quadratische Gleichungen benutzen.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist. (3 Pkt.)

(b) Beweisen Sie, dass genau ein $x > 0$ existiert so, dass $\sqrt{c + x} = x$. (2 Pkt.)

(c) Beweisen Sie dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. (4 Pkt.)

Aufgabe 5 (Konvergenz)**.** Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ rekursiv durch

$$a_0 := 1, \qquad a_{n+1} := 1 + 1/a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Sie dürfen in dieser Aufgabe die Lösungsformel (a-b-c-Formel) für quadratische Gleichungen benutzen.

(a) Zeigen Sie, dass die gerade Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und die ungerade Teilfolge $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton sind. (3 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass diese gerade und ungerade Teilfolgen konvergieren. (3 Pkt.)

(c) Zeigen Sie, dass die gerade und ungerade Teilfolgen denselben Grenzwert a haben. Schlussfolgern Sie hieraus, dass auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. (3 Pkt.)