Abgabefrist: Freitag 18.12. um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)**.** Bestimmen Sie mit Beweis, ob die nachfolgenden Reihen konvergieren. Sie dürfen die Ergebnisse aus dem Skript bis einschließlich Abschnitt 6.2 und aus den Übungs- und Präsenzblättern benutzen.

(a) $\sum_k \left(\frac{k-2}{2k-1}\right)^{3k}$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_k \frac{(2k)!}{7^k}$. (2 Pkt.)

(c) $\sum_k \frac{9k-1}{3k^3+5}$. (2 Pkt.)

(d) $\sum_k \frac{k^k}{k!}$. (2 Pkt.)

(e) $\sum_k \frac{4k^4}{(2k^2+5)3^k}$. (2 Pkt.)

(f) $\sum_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n n!}$. (2 Pkt.)

Aufgabe 2 (Verschärftes Quotientenkriterium)**.** Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_j a_j$ konvergiert, falls es ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\theta > 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \leq 1 - \frac{\theta}{j+1}, \qquad \text{für alle } j \geq N. \qquad \text{(6 Pkt.)}$$

Hinweis: benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung vom Präsenzblatt 6, Aufgabe 2.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_j a_j$ divergiert, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \geq 1 - \frac{1}{j+1}, \qquad \text{für alle } j \geq N. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

(c) Vergleichen Sie die Aussage in Teilaufgabe (a) mit dem Quotientenkriterium. Was stellen Sie fest? (1 Pkt.)

Aufgabe 3 (Lemma 6.20)**.** Sei (a_j) eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq \limsup_{j\to\infty} a_j^{1/j} \leq \limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j}, \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

wobei die Grenzwerte in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ genommen werden, also $+\infty$ sein dürfen.

Aufgabe 4 (Konvergenz von Potenzreihen)**.** Berechnen Sie den Konvergenzradius für die folgenden Potenzreihen, und geben Sie an für welche $x \in \mathbb{C}$ diese Potenzreihen konvergieren.

(a) $\sum_n \frac{4^n}{n!} x^n$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_n (-1)^{n-1} n^n x^n$. (2 Pkt.)

(c) $\sum_n n^2 9^n x^n$. (3 Pkt.)

(d) $\sum_n (10 + 1/n)^n x^n$. (3 Pkt.)

Aufgabe 5 (Cauchy-Produktformel). (a) In Aufgabe 5 vom Übungsblatt 6 haben wir schon die Gleichheit

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ bewiesen. Geben Sie jetzt einen neuen Beweis dieser Gleichheit mithilfe der Cauchy-Produktformel.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \qquad \text{(2 Pkt.)}$$

Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ und für den Wert $C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ die Identität

$$2C(x)^2 = C(2x) + 1. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

Erkennen Sie die Funktion C?

Ankündigung der Fachschaft: Am 22. Dezember 2020 um 19:15 findet ein Treffen für die Mathe-Lehramts-studierenden auf Zoom statt. Die Zugangsdaten findet ihr auf der Fachschaftswebsite (`www.fsmath.uni-bonn.de`). Wir sind gespannt auf eure Erfahrungen und Eindrücke! Bitte erscheint zahlreich, damit wir viel Rückmeldung bekommen, um das Studium für kommende Generationen zu optimieren.