Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Abgabefrist: Freitag 15.1. um 12:00 Uhr.

Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen in $\mathbb{C}$ konvergieren:

(a) $\sum_n (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(n+2)^2-1}$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_n \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ (2 Pkt.)

(c) $\sum_n \left(\frac{1-i}{2+i}\right)^n$ (2 Pkt.)

Aufgabe 2 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt *Lipschitz-stetig* mit Konstante $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ falls für alle $x, x' \in X$ stets $d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x')$ gilt.

(a) Zeigen Sie dass jede Lipschitz-stetige Funktion (überall) stetig ist. (2 Pkt.)

(b) Sei X ein metrischer Raum, $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, und F eine Menge von Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, die alle Lipschitz-stetig mit Konstante L sind. Man nehme an dass ein $x_0 \in X$ mit $\inf_{f \in F} f(x_0) \in \mathbb{R}$ existiert. Zeigen Sie dass die Funktion
$$g(x) := \inf_{f \in F} f(x)$$
Werte in $\mathbb{R}$ annimmt und Lipschitz-stetig mit Konstante L ist. (3 Pkt.)

(c) Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ nichtleer. Zeigen Sie dass die Abstandsfunktion $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definiert durch
$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a),$$
Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist. (1 Pkt.)

(d) Zeigen Sie dass die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = \sqrt{x}$, nicht Lipschitz-stetig ist. (2 Pkt.)

Aufgabe 3 (Hölder-Stetigkeit)**.** Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Hölder-stetig (zum Exponenten α) falls
$$C_\alpha(f) := \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine Hölder-stetige Funktion ist stetig. (2 Pkt.)

(b) Die Funktion $f(x) := x^\alpha$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ Hölder-stetig (zum Exponenten α). (3 Pkt.)

(c) Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und sei $I = [a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Ist f Hölder-stetig zum Exponenten β, dann ist f auch Hölder-stetig zum Exponenten α. (2 Pkt.)

(d) Sei nun $\alpha > 1$. Ist f Hölder-stetig zum Exponenten α, dann ist f konstant. (3 Pkt.)

Aufgabe 4 (Endliche Durchschnittseigenschaft). Sei X ein metrischer Raum. Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X hat die *endliche Durchschnittseigenschaft* wenn für jede nichtleere endliche Teilmenge $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ gilt $\cap\mathcal{F}' \neq \emptyset$.
Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind. (6 Pkt.)

(a) X ist kompakt.

(b) Jede Menge $\mathcal{F}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit der endlichen Durchschnittseigenschaft hat nichtleeren Durchschnitt, also $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.