Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Abgabefrist: Freitag 22.1. um 12:00 Uhr.
Aufgabe 2 ist eine *Bonusaufgabe*: hiermit können zusätzliche Punkte für die Klausurzulassung gewonnen werden.

Aufgabe 1 (Stetigkeit)**.** Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Sei $a \in X$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2 Pkt.)

(a.1) f ist in a stetig.
(a.2) Für jede Umgebung U von $f(a)$ ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie:

(b.1) Für alle $A \subseteq X$ gilt $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$. (1 Pkt.)
(b.2) Für alle $B \subseteq Y$ gilt $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. (1 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind: (4 Pkt.)

(c.1) f ist stetig.
(c.2) Für jede offene Menge $G \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(G) \subseteq X$ offen.
(c.3) Für jede abgeschlossene Menge $F \subseteq Y$ ist das Urbild $f^{-1}(F) \subseteq X$ abgeschlossen.

(d) Man nehme an dass f stetig ist. Zeigen Sie dass für jedes $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ abgeschlossen ist. (2 Pkt.)

Aufgabe 2 (Kleinster Abstand, *Bonusaufgabe*)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A, B \subseteq X$ definieren wir den kleinsten Abstand (siehe auch Übungsblatt 9, Aufgabe 2(c))

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

(a) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestimmen Sie $\operatorname{dist}\big(\overline{B_r(x)}, \overline{B_s(y)}\big)$. (2 Bonuspkt.)

Beweisen oder widerlegen Sie:

(b) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, \{x\}) > 0$. (2 Bonuspkt.)

(c) Seien A, B abgeschlossene Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. (3 Bonuspkt.)

(d) Sei A eine abgeschlossene und B eine kompakte Teilmenge von X sodass $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. (3 Bonuspkt.)

Aufgabe 3 (Gleichmäßig stetige Funktionen)**.** Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Dann ist für jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. (2 Pkt.)

(b) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Funktion. Dann ist für jede Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y. (2 Pkt.)

(c) Für jede gleichmäßig stetige Funktion $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gibt es genau eine gleichmäßig stetige Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (2 Pkt.)

(d) Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetige Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (2 Pkt.)

(e) Für jede gleichmäßig stetige Funktion $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ gibt es genau eine gleichmäßig stetige Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. (2 Pkt.)

Aufgabe 4 (Inneres, Abschluss, Rand)**.** Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik und $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussagen: (5 Pkt.)

(a) Für $n = 1$ gilt: Ist $A \neq \varnothing$ und $A \neq \mathbb{R}$, dann ist $\partial A \neq \varnothing$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ beliebig gilt: Ist $A \neq \varnothing$ und $A \neq \mathbb{R}^n$, dann ist $\partial A \neq \varnothing$.

Aufgabe 5 (Eine stetige nicht-differenzierbare Funktion)**.** Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z})$, wobei dist in Übungsblatt 9, Aufgabe 2(c) definiert wurde. Weiter definieren wir $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (für $n \in \mathbb{N}$) und $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := 4^{-n} f(4^n x), \qquad \varphi(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 4^{-n} f(4^n x).$$

(a) Zeigen Sie dass φ wohldefiniert ist. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass f_n Lipschitz-stetig ist und dass

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k(x) - f_k(y)| \leq \frac{1}{3 \cdot 4^m},$$

und beweisen Sie dass φ gleichmäßig stetig ist. (4 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass φ in keinem Punkt differenzierbar ist. (5 Pkt.)

Hinweis: Gegeben $x \in \mathbb{R}$, finden Sie eine Folge $h_n \to 0$ sodass $f_j(x + h_n) - f_j(x) = \pm h_n$ für $j \leq n$ und $f_j(x + h_n) = f_j(x)$ für $j > n$.