Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Abgabefrist: Freitag 29.1. um 12:00 Uhr.
Aufgaben 1 und 5 sind *Bonusaufgaben*: hiermit können zusätzliche Punkte für die Klausurzulassung gewonnen werden.

**Aufgabe 1** (*Bonusaufgabe*)**.** Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge der Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Angenommen, jedes $f_n$ ist beschränkt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f$ ebenfalls beschränkt ist. (3 Bonuspkt.)

(b) Wir zeigen nun, dass punktweise Konvergenz in (a) nicht ausreicht, um die Beschränktheit von $f$ zu folgern. Seien zum Beispiel $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $f$ gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/n) \\ \frac{1}{x}, & x \in [1/n, 1], \end{cases} \qquad f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1/x, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass jedes $f_n$ beschränkt ist, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f$ konvergiert, aber dass $f$ unbeschränkt ist. (3 Bonuspkt.)

(c) Angenommen, jedes $f_n$ ist monoton wachsend und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $f$ ebenfalls monoton wachsend ist. (3 Bonuspkt.)

*Hinweis:* Zeigen Sie für $x, y \in [0,1]$ mit $y > x$ dass $f(y) \geq f(x) - \epsilon$ für alle $\epsilon > 0$.

(d) Angenommen, jedes $f_n$ ist monoton wachsend und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. (3 Bonuspkt.)

**Aufgabe 2** (Grenzwerte von Funktionen)**.** Bestimmen Sie mit Beweis für die nachfolgenden Funktionen $f_j : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ jeweils den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f_j(x)$.

(a) $f_1(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$. (3 Pkt.)

(b) $f_2(x) := \exp\left(\frac{x^4}{1+x^2}\right)\exp(-x^2)$. (3 Pkt.)

**Aufgabe 3** (Ableitungen)**.** Bestimmen Sie die Ableitungen der nachfolgenden Funktionen.

(a) $\exp(x \sin x)$ für $x \in \mathbb{R}$. (2 Pkt.)

(b) $\sqrt{\exp(-x^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$. (2 Pkt.)

(c) $x^{(x^x)}$ für $x \in \mathbb{R}_{>0}$. (3 Pkt.)

(d) $\frac{\tan x}{1+(\ln x)^2}$ für $x \in (0, \pi/2)$. (3 Pkt.)

**Aufgabe 4** (Inverse Sinus/Kosinus)**.** (a) Zeigen Sie dass cos auf dem Intervall $[0, \pi/4]$ streng monoton fallend ist und auf diesem Intervall $\geq 0$ ist.

*Hinweis:* Sie brauchen nur die bereits aus dem Skript bekannten Aussagen über cos und sin. (2 Pkt.)

(b) Zeigen Sie dass cos auf dem Intervall $[0, \pi/2]$ streng monoton fallend und auf diesem Intervall $\geq 0$ ist. (1 Pkt.)

(c) Zeigen Sie dass cos auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist und dieses Intervall bijektiv auf $[-1, 1]$ abbildet. (1 Pkt.)

(d) Zeigen Sie dass $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ bijektiv ist. (1 Pkt.)

(e) Nun definieren wir die Umkehrfunktionen $\arcsin := \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ und $\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$. Berechnen Sie die Ableitungen $\arcsin'$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$ und $\arccos'$ auf $(0, \pi)$. (5 Pkt.)

**Aufgabe 5** (*Bonusaufgabe*). Der natürliche Logarithmus ln ist eine konkave Funktion (Korollar 9.33). Diese Eigenschaft werden wir hier benutzen für einen neuen Beweis der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (siehe auch Präsenzblatt 3, Aufgabe 1).
Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $j = 1, \dots, n$, seien $x_j \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lambda_j \in (0, 1)$ mit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion über $n$ die Ungleichung

$$\ln\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln x_j, \qquad n \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

(b) Beweisen Sie (mithilfe vom Teilaufgabe (a)) die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \geq \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j}, \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

und folgern Sie hieraus die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \geq \left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)^{1/n}. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

**Aufgabe 6** (Nicht-stetige Ableitungen). Für $k, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $f_{k,m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_{k,m}(x) := \begin{cases} x^k \sin(1/x^m), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie (für beliebige $k, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) dass die Funktion $f_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist, berechnen Sie die Ableitung $f'_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und zeigen Sie dass $f'_{k,m}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist. (3 Pkt.)

(b) Bestimmen Sie mit Beweis für welche $k, m \in \mathbb{Z}$ die Funktion $f_{k,m}$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie in diesen Fälle $f'_{k,m}(0)$. (3 Pkt.)

*Hinweis:* Arbeiten Sie hierbei an der kritischen Stelle $x = 0$ direkt anhand der Definition der Differenzierbarkeit.

(c) Falls $f_{k,m}$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist: bestimmen Sie mit Beweis für welche $k, m \in \mathbb{Z}$ die Ableitung $f'_{k,m}$ stetig ist in 0. (3 Pkt.)