Aufgabe 1 (Lemma 1.6)**.** Wir definieren $1 = S(0)$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ S(n) = n + 1. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Hinweis: Sie dürfen nur Definition 1.1 bis Lemma 1.5 aus dem Skript benutzen.

Lösung. Wir benutzen Induktion über n.
<u>IA</u>. Sei $n = 0$. Dann gilt

$$S(0) \overset{\text{def}}{=} 1 \overset{0+}{=} 0 + 1.$$

<u>IS</u>. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir nehmen an, dass die Induktionshypothese (IH) $S(n) = n + 1$ gilt. Dann zeigen wir diese Aussage für $S(n)$:

$$S(S(n)) \overset{\text{IH}}{=} S(n+1) \overset{S+}{=} S(n) + 1.$$ □

Aufgabe 2 (Lemma 1.9)**.** Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$(\forall m, n, p \in \mathbb{N})\ (m + n) + p = m + (n + p). \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Hinweis: Sie dürfen nur Definition 1.1 bis Lemma 1.8 aus dem Skript benutzen.

Lösung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ fest. Wir benutzen Induktion über $p \in \mathbb{N}$.
<u>IA</u>

$$(m + n) + 0 \overset{+0}{=} m + n \overset{+0}{=} m + (n + 0).$$

<u>IS</u>

$$(m + n) + S(p) \overset{+S}{=} S((m + n) + p) \overset{\text{IH}}{=} S(m + (n + p)) \overset{+S}{=} m + S(n + p) \overset{+S}{=} m + (n + S(p)).$$ □