Aufgabe 1 (Multiplikation)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Existenz der Eins:
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \cdot n = n. \tag{2 Pkt.}$$

(b) Multiplikation auf $\mathbb{N}$ ist assoziativ:
$$(\forall n, m, p \in \mathbb{N})\ (nm)p = n(mp). \tag{4 Pkt.}$$

(c) Multiplikation auf $\mathbb{N}$ ist kommutativ:
$$(\forall n, m \in \mathbb{N})\ nm = mn. \tag{4 Pkt.}$$

Hinweis: Sie dürfen das Skript (bis einschließlich §1.2) und Aufgabe 4 vom Übungsblatt 'Präsenzaufgaben 1' benutzen.

Lösung. (a)
$$1n \overset{\text{def}}{=} S(0)n \overset{S\cdot}{=} 0n + n \overset{0\cdot}{=} 0 + n \overset{0+}{=} n.$$

(b) Wir nehmen $m, p \in \mathbb{N}$ fest, und beweisen mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$: $(nm)p = n(mp)$.

<u>IA</u>: Für $n = 0$ gilt
$$(0m)p \overset{0\cdot}{=} 0p \overset{0\cdot}{=} 0 \overset{0\cdot}{=} 0(mp).$$

<u>IS</u>: Wir nehmen als Induktionshypothese (IH) dass $(nm)p = n(mp)$ richtig ist für n, und beweisen diese Aussage für $S(n)$:
$$\big(S(n)m\big)p \overset{S\cdot}{=} (nm + m)p \overset{1.12}{=} (nm)p + mp \overset{\text{IH}}{=} n(mp) + mp \overset{S\cdot}{=} S(n)(mp).$$

(c) Wir nehmen $m \in \mathbb{N}$ fest, und beweisen mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$: $nm = mn$.

<u>IA</u>: Für $n = 0$ gilt
$$0m \overset{0\cdot}{=} 0 \overset{\cdot 0}{=} m0.$$

<u>IS</u>: Wir nehmen als Induktionshypothese (IH) dass $nm = mn$ richtig ist für n, und beweisen diese Aussage für $S(n)$:
$$S(n)m \overset{S\cdot}{=} nm + m \overset{\text{IH}}{=} mn + m \overset{\cdot S}{=} mS(n).$$
□

Aufgabe 2 (Ordnung)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt die Kürzungsregel:
$$(\forall n, m, p \in \mathbb{N})\ n \le m \iff n + p \le m + p. \tag{2 Pkt.}$$

(b)
$$(\forall n, m, p \in \mathbb{N})\ n \le m \implies np \le mp. \tag{3 Pkt.}$$

Lösung. (a) Seien $n, m, p \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned} n \leq m &\overset{\text{def}}{\iff} (\exists l \in \mathbb{N})\; n + l = m \\ &\overset{1.10}{\iff} (\exists l \in \mathbb{N})\; n + l + p = m + p \\ &\overset{1.8}{\iff} (\exists l \in \mathbb{N})\; n + p + l = m + p \\ &\overset{\text{def}}{\iff} n + p \leq m + p. \end{aligned}$$

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ fest mit $n \leq m$. Wir benutzen Induktion nach p.

<u>IA</u>:

$$n0 \overset{\cdot 0}{=} 0 \leq 0 \overset{\cdot 0}{=} m0.$$

<u>IS</u>: Wir nehmen an dass $np \leq mp$ gilt. Dann folgt

$$nS(p) \overset{\cdot S}{=} np + n \overset{(a)}{\leq} mp + n \overset{1.8}{=} n + mp \overset{(a)}{\leq} m + mp \overset{1.8}{=} mp + m \overset{\cdot S}{=} mS(p).$$

Da die Ordnung transitiv ist (Lemma 1.13), folgt $nS(p) \leq mS(p)$. □

Aufgabe 3 (Lemma 2.13: Verkettung/Komposition)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen sind, dann ist

$$(g \circ f) : X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

auch eine Abbildung. (5 Pkt.)

(b) Die Verkettung ist assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. (5 Pkt.)

Lösung. (a) Der Graph von $g \circ f$ ist charakterisiert durch

$$\Gamma_{g \circ f} := \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists! y \in Y)\; (x, y) \in \Gamma_f \wedge (y, z) \in \Gamma_g\}.$$

Da f eine Abbildung ist, existiert für jedes $x \in X$ ein eindeutiges $y \in Y$ so dass $(x, y) \in \Gamma_f$. Da g auch eine Abbildung ist, existiert ein eindeutiges $z \in Z$ so dass $(y, z) \in \Gamma_g$. Das heißt:

$$z = g(y) = g(f(x)),$$

und z ist hierdurch eindeutig bestimmt. Also $\Gamma_{g \circ f}$ erfüllt die Eigenschaft (2.2) im Skript (Definition 2.12), und ist deshalb der Graph einer Abbildung.

(b) Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, und $h : Z \to W$ Abbildungen. Wir definieren

$$\Gamma_{h \circ g \circ f} := \{(x, w) \in X \times W \mid (\exists! y \in Y)(\exists! z \in Z)\; (x, y) \in \Gamma_f \wedge (y, z) \in \Gamma_g \wedge (z, w) \in \Gamma_h\}.$$

Wir müssen zeigen dass $\Gamma_{h \circ (g \circ f)} = \Gamma_{h \circ g \circ f} = \Gamma_{(h \circ g) \circ f}$. Der Graph von $h \circ (g \circ f)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{h \circ (g \circ f)} &= \{(x, w) \in X \times W \mid (\exists! z \in Z)\; (x, z) \in \Gamma_{g \circ f} \wedge (z, w) \in \Gamma_h\} \\ &= \{(x, w) \in X \times W \mid (\exists! z \in Z)\; [(\exists! y \in Y)\, (x, y) \in \Gamma_f \wedge (y, z) \in \Gamma_g] \wedge (z, w) \in \Gamma_h\} \\ &= \{(x, w) \in X \times W \mid (\exists! z \in Z)(\exists! y \in Y)\; (x, y) \in \Gamma_f \wedge (y, z) \in \Gamma_g \wedge (z, w) \in \Gamma_h\} \\ &= \Gamma_{h \circ g \circ f}. \end{aligned}$$

Der Beweis von $\Gamma_{h \circ g \circ f} = \Gamma_{(h \circ g) \circ f}$ ist ähnlich. □

Aufgabe 4 (Lemma 2.27)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$. Dann gilt $m \leq n$ oder $m = n + 1$. (5 Pkt.)

Lösung. Die Annahme $m \leq n + 1$ bedeutet dass es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt mit $n + 1 = m + p$.
Per Induktion über $p \in \mathbb{N}$ zeigen wir

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})\big(n + 1 = m + p \implies [m \leq n \vee m = n + 1]\big).$$

IA: $p = 0$. Dann $n + 1 = m + 0 = m$.
IS: Wenn $n + 1 = m + S(p) = m + p + 1$, dann folgt mit der Kürzungsregel $n = m + p$, und deshalb $n \geq m$. □