Aufgabe 1 (Summen)**.** (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k = -6 + 2^{n+1}(3 - 2n + n^2). \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Lösung. Wir benutzen vollständige Induktion, aber wir fangen die Induktion an bei $n = 1$ (statt $n = 0$):

(a) IA: Für $n = 1$ gilt $(-1)^{1-1} 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.
IS:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{(n+1)-k} k^2 &= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IH}}{=} -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\Big(-\frac{n}{2} + n + 1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

(b) IA: Für $n = 1$ gilt $1^2 \cdot 2^1 = 2 = -6 + 2^2(3 - 2 \cdot 1 + 1^2)$.
IS:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 2^k &= \sum_{k=1}^{n} k^2 2^k + (n+1)^2 2^{n+1} \\ &\overset{\text{IH}}{=} -6 + 2^{n+1}(3 - 2n + n^2) + 2^{n+1}(n^2 + 2n + 1) \\ &= -6 + 2^{n+1}(4 + 2n^2) = -6 + 2^{n+2}(2 + n^2) \\ &= -6 + 2^{n+2}\big(3 - 2(n+1) + (n+1)^2\big).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2 (Proposition 3.6)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})$ das Distributivgesetz erfüllt:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z}) \quad (x + y)z = xz + yz. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Die Einbettung $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ vertauscht mit Addition und Multiplikation:

$$(\forall a, b \in \mathbb{N}) \quad \iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b) \ \wedge \ \iota(ab) = \iota(a)\iota(b).$$

Weiterhin ist $\mathbb{Z} = \iota(\mathbb{N}) \cup (-\iota(\mathbb{N}))$ und $\iota(\mathbb{N}) \cap (-\iota(\mathbb{N})) = \{0\}$. (5 Pkt.)

Lösung. (a) Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $x = [(a, b)]$, $y = [(c, d)]$ und $z = [(e, f)]$ mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned}\big([(a,b)] + [(c,d)]\big)[(e,f)] &= [(a + c, b + d)][(e, f)] \\ &= [((a + c)e + (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e)] \\ &\overset{1.12}{=} [(ae + ce + bf + df, af + cf + be + de)] \\ &\overset{1.8,1.9}{=} [(ae + bf + ce + df, af + be + cf + de)] \\ &= [(ae + bf, af + be)] + [(ce + df, cf + de)] \\ &= [(a, b)][(e, f)] + [(c, d)][(e, f)].\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen zuerst dass ι vertauscht mit Addition und Multiplikation:

$$\iota(a+b) = [(a+b,0)] = [(a+b,0+0)] = [(a,0)] + [(b,0)] = \iota(a) + \iota(b),$$
$$\iota(ab) = [(ab,0)] = [(ab+00, a0+0b)] = [(a,0)][(b,0)] = \iota(a)\iota(b).$$

Sei nun $[(a,b)] \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $a \geq b$ oder $a \leq b$. Falls $a \geq b$ existiert $c \in \mathbb{N}$ mit $a = b + c$. Hieraus folgt $(a,b) \sim (c,0)$ und deshalb $[(a,b)] = \iota(c) \in \iota(\mathbb{N})$. Falls $a \leq b$ existiert $c \in \mathbb{N}$ mit $a + c = b$. Hieraus folgt $(a,b) \sim (0,c)$ und deshalb $[(a,b)] = [(0,c)] = -\iota(c) \in -\iota(\mathbb{N})$. Zusammenfassend gilt $[(a,b)] \in \iota(\mathbb{N})$ oder $[(a,b)] \in -\iota(\mathbb{N})$, und damit ist $\mathbb{Z} = \iota(\mathbb{N}) \cup (-\iota(\mathbb{N}))$ bewiesen.

Schließlich beweisen wir noch $\iota(\mathbb{N}) \cap (-\iota(\mathbb{N})) = \{0\}$. Anmerkung: $-\iota(\mathbb{N}) = \{-\iota(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $-\iota(n)$ die additive Inverse in $\mathbb{Z}$ bezeichnet die in der VL konstruiert wurde.

Sei $[(a,b)] \in \iota(\mathbb{N}) \cap (-\iota(\mathbb{N}))$. Dann existieren $c, d \in \mathbb{N}$ mit $[(a,b)] = [(c,0)] = [(0,d)]$. Dies bedeutet insbesondere $c+d = 0+0 = 0$ und deshalb (Lemma 1.11) $c = d = 0$. Es folgt also $[(a,b)] = [(0,0)] = 0_{\mathbb{Z}}$. $\square$

Aufgabe 3 (Lemma 3.11)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \iota(\mathbb{N})$. (5 Pkt.)

(b) Das Paar $(\mathbb{Z}, \leq)$ ist ein total geordneter K1-Ring. Zur Präzisierung: es wurde bereits früher gezeigt dass $\mathbb{Z}$ ein K1-Ring ist und dass $\leq$ eine totale Ordnung darauf ist, diese Aussagen können also vorausgesetzt werden. (5 Pkt.)

Lösung. (a) Wir beweisen die Äquivalenz:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\; x \geq 0_{\mathbb{Z}} \iff x \in \iota(\mathbb{N}).$$

Ist $x = [(c, 0_{\mathbb{N}})] = \iota(c)$ für ein $c \in \mathbb{N}$, dann gilt wegen $c \geq 0_{\mathbb{N}}$ auch $c + 0_{\mathbb{N}} \geq 0_{\mathbb{N}} + 0_{\mathbb{N}}$, was die Definition von $x = [(c, 0_{\mathbb{N}})] \geq [(0_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}})] = 0_{\mathbb{Z}}$ ist. Umgekehrt, ist $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$ mit $x \geq 0_{\mathbb{Z}} = [(0_{\mathbb{N}}, 0_{\mathbb{N}})]$, so gilt $a + 0_{\mathbb{N}} \geq b + 0_{\mathbb{N}}$. Per Definition der Ordnung auf $\mathbb{N}$ existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit $a + 0_{\mathbb{N}} = b + c$. Also ist $[(a,b)] = [(c, 0_{\mathbb{N}})] = \iota(c) \in \iota(\mathbb{N})$.

(b) Wir müssen die Eigenschaften aus Definition 3.10 kontrollieren:

(i) Für alle $x = [(a,b)], y = [(c,d)], z = [(e,f)] \in \mathbb{Z}$ mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ gelten die Implikationen

$$\begin{aligned} [(a,b)] \leq [(c,d)] &\implies a + d \leq c + b \\ &\implies a + e + d + f \leq c + e + b + f \\ &\implies [(a+e, b+f)] \leq [(c+e, d+f)] \\ &\implies [(a,b)] + [(e,f)] \leq [(c,d)] + [(e,f)]. \end{aligned}$$

(ii) Wegen Teilaufgabe (a) müssen wir nur beweisen dass

$$(\forall x, y \in \mathbb{Z})\; x \in \iota(\mathbb{N}) \wedge y \in \iota(\mathbb{N}) \implies xy \in \iota(\mathbb{N}).$$

Aber sind $x = [(a,0)]$ und $y = [(c,0)]$ in $\iota(\mathbb{N})$, dann gilt in der Tat auch $xy = [(ac,0)] \in \iota(\mathbb{N})$. $\square$

Aufgabe 4 (Definition 3.18)**.** Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d > 0$ definieren wir

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] \;:\iff\; ad \leq cb.$$

Beweisen Sie, dass diese Relation auf $\mathbb{Q}$ wohldefiniert ist. (5 Pkt.)

Lösung. Wir beweisen zuerst die folgende Aussage:

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}) \quad ab \geq 0 \wedge a > 0 \implies b \geq 0. \tag{$*$}$$

Im Fall $ab \neq 0$ folgt $(*)$ direkt aus Lemma 3.13.(iii). Im Fall $ab = 0$ benutzen wir dass $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist (Lemma 3.9). Wegen $a \neq 0$ muss dann gelten $b = 0$, und insbesondere gilt $b \geq 0$. Hiermit ist die Aussage $(*)$ bewiesen.
Seien nun $a, a', b, b', c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, b', d > 0$. Angenommen $(a, b) \sim (a', b')$, d.h. $ab' = a'b$. Dann haben wir die folgenden Implikationen:

$$ad \leq cb \overset{3.10.(ii)}{\implies} ab'd \leq cbb' \overset{ab'=a'b}{\implies} a'bd \leq cbb' \overset{3.10.(i)}{\implies} 0 \leq b(cb' - a'd) \overset{(*)}{\implies} \leq cb' - a'd \overset{3.10.(i)}{\implies} a'd \leq cb'.$$

Wir bemerken dass $\mathbb{Z}$ ein total geordneter K1-Ring ist (siehe Lemma 3.11 und Präsenzblatt 2, Aufgabe 4), und somit ist die Anwendung von Definition 3.10 gerechtfertigt. Vertauschen wir (a, b) mit (a', b'), dann ergibt sich die Äquivalenz $ad \leq cb \iff a'd \leq cb'$. Hiermit haben wir bewiesen dass

$$[(a, b)] \leq [(c, d)] \iff [(a', b')] \leq [(c, d)].$$

Der Beweis von $[(a, b)] \leq [(c, d)] \iff [(a, b)] \leq [(c', d')]$ (falls $(c, d) \sim (c', d')$) ist ähnlich. $\square$