Universität Bonn
PD Dr. Pavel Zorin-Kranich
Dr. Koen van den Dungen

Aufgabe 1 (K1-Ring). Sei R ein K1-Ring.

(a) Wir definieren $a - b := a + (-b)$. Beweisen Sie für alle $a, b, c \in R$ die folgenden Rechenregeln:

$$a - (b + c) = (a - b) - c, \qquad (a - b)c = ac - bc. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

(b) Sei R nun total geordnet und nullteilerfrei. Beweisen Sie für alle $a, b, c \in R$ die Aussagen

$$ab > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0), \qquad a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Lösung. (a) Wir benutzen die Rechenregeln $-(b + c) = (-b) + (-c)$ und $(-b)c = -(bc)$ (siehe Präsenzblatt 3, Aufgabe 2(a)). Dann folgt

$$a - (b + c) = a + (-(b + c)) = a + (-b) + (-c) = (a - b) - c$$

und

$$(a - b)c = (a + (-b))c = ac + (-b)c = ac + (-(bc)) = ac - bc.$$

(b) Die erste Äquivalenz folgt aus den folgenden drei Implikationen:

$(a > 0 \wedge b > 0) \implies ab > 0$: Seien $a > 0$ und $b > 0$. Da R total geordnet ist, folgt $ab \geq 0$ (siehe Definition 3.10.(ii)). Da R nullteilerfrei ist (und $a \neq 0 \neq b$), folgt $ab \neq 0$ und deshalb $ab > 0$.

$(a < 0 \wedge b < 0) \implies ab > 0$: Seien $a < 0$ und $b < 0$, dann sind $(-a) > 0$ und $(-b) > 0$ und aus der ersten Implikation folgt $ab = (-a)(-b) > 0$.

$ab > 0 \implies (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$: Sei $ab > 0$. Da R nullteilerfrei ist, gilt entweder $a > 0$ oder $a < 0$. Wir betrachten zuerst den Fall $a > 0$. Wegen Lemma 3.13.(iii) gilt $b \geq 0$. Aber $b \neq 0$ (da R nullteilerfrei ist), also gilt $b > 0$. Im Fall $a < 0$ betrachten wir $(-a) > 0$ und es folgt ebenso $(-b) > 0$, also $b < 0$.

Schließlich zeigen wir noch die letzte Implikation:

$a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc$: Es gilt $b - a > 0$, und da R total geordnet ist folgt $(b - a)c \geq 0$. Da R nullteilerfrei ist, gilt $(b - a)c \neq 0$ und wir konkludieren $ac < ac + (b - a)c = bc$. □

Aufgabe 2 (Körper). (a) Sei $\mathbb{K}$ ein K1-Ring. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (4 Pkt.)

(a.1) $\mathbb{K}$ ist ein Körper;

(a.2) $\mathbb{K}$ hat mit mindestens zwei Elemente, und für alle $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}$.

(b) Sei $\mathbb{K}$ ein total geordneter Körper (d.h., ein Körper und ein total geordneter K1-Ring). Beweisen Sie für alle $a, b \in \mathbb{K}$ die folgenden Aussagen: (6 Pkt.)

(b.1) $a < b \implies (\exists c \in \mathbb{K})\ a < c \wedge c < b$.

(b.2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $(a, b \geq 0 \wedge a^n = b^n) \implies a = b$.

(b.3) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $(a, b \geq 0 \wedge a^n > b^n) \implies a > b$.

Lösung. (a) (a.1) $\Longrightarrow$ (a.2): Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann gilt $0 \neq 1$, und insbesondere hat $\mathbb{K}$ mindestens zwei Elemente. Gilt $ax = b$ mit $a \neq 0$, dann existiert a^{-1} und wir haben eine Lösung $x = a^{-1}b$:

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1b = b.$$

Ist $y \in \mathbb{K}$ auch eine Lösung, dann folgt

$$y = 1y = (a^{-1}a)y = a^{-1}(ay) = a^{-1}b = x,$$

also die Lösung ist eindeutig.

(a.2) $\Longrightarrow$ (a.1): Wegen Aufgabe 2(b) vom Präsenzblatt 3 gilt $0 \neq 1$. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ mit $x \neq 0$, hat $ax = 1$ genau eine Lösung, und deshalb existiert a^{-1}. Wir konkludieren dass $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

(b) (b.1) Wir bemerken zuerst dass es eine injektive ordnungserhaltende Abbildung $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{K}$ gibt (Satz 3.25). Insbesondere gibt es ein Element $0 < \frac{1}{2} \in \mathbb{K}$ mit $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ und $2 = 1 + 1$.

Sei nun $a < b$. Dann gelten auch $a + a < a + b$ und $a + b < b + b$, und wir haben die Ungleichungen

$$a = \frac{1}{2}(1+1)a = \frac{1}{2}(a+a) < \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}(b+b) = \frac{1}{2}(1+1)b = b.$$

Es existiert also $c := \frac{1}{2}(a+b)$ mit $a < c < b$.

(b.2) Seien $a, b \geq 0$ mit $a^n = b^n$. Widerspruchsbeweis: wir nehmen an dass $a \neq b$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, sei $a < b$. Dann folgt mittels vollständiger Induktion dass $a^m < b^m$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

IA: Für $m = 1$ ist $a < b$ vorausgesetzt.

IS: Gilt $a^m < b^m$, dann folgt $a^{m+1} = a^m a \leq a^m b \overset{\text{IH}}{<} b^m b = b^{m+1}$.

Mit $m = n$ bekommen wir $a^n < b^n$, im Widerspruch zu $a^n = b^n$, und deswegen war die Voraussetzung $a < b$ falsch. Ebenso ist $a > b$ falsch und es folgt $a = b$.

(b.3) Seien $a, b \geq 0$ mit $a^n > b^n$. Widerspruchsbeweis: nehmen wir an $a \leq b$, dann folgt wie in (b.2) mittels Induktion dass $a^n \leq b^n$. Aber dies widerspricht $a^n > b^n$, also die Annahme $a \leq b$ war falsch, und es gilt $a > b$. □

Aufgabe 3 (Infimum und Supremum). Man bestimme jeweils Infimum und Supremum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ und untersuche, ob diese Mengen Maximum bzw. Minimum besitzen. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $M_1 := \left\{(-1)^{n+1}(1 + \frac{1}{n+1}) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; (3 Pkt.)

(b) $M_2 := \left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$; (3 Pkt.)

(c) $M_3 := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 1 \leq 0\right\}$; (3 Pkt.)

(d) $M_4 := \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 9\right\}$. (3 Pkt.)

Lösung. (a) Sei $a_n := (-1)^{n+1}(1 + \frac{1}{n+1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir bemerken zuerst dass $a_n < 0$ für gerade n und $a_n > 0$ für ungerade n. Um das Supremum zu bestimmen, müssen wir also nur ungerade n betrachten. Es gilt $a_1 = \frac{3}{2}$, und für alle ungerade $n > 1$ gilt $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$ und deshalb $a_n = 1 + \frac{1}{n+1} < \frac{3}{2}$.

Hiermit haben wir gezeigt dass $\frac{3}{2}$ eine obere Schranke ist für M_1, und wegen $a_1 = \frac{3}{2}$ ist $\frac{3}{2}$ die kleinste obere Schranke sowie das Maximum:

$$\sup(M_1) = \max(M_1) = \frac{3}{2}.$$

Für das Infimum betrachten wir gerade $n \in \mathbb{N}$, und aus $a_0 = -2$ und $a_n > -2$ für alle gerade n folgt

$$\inf(M_1) = \min(M_1) = -2.$$

(b) Sei $a_{n,m} := \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Es gilt $a_{0,0} = 2$ und $a_{n,m} \leq 2$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, und somit

$$\sup(M_2) = \max(M_2) = 2.$$

Weiterhin gilt $a_{n,m} > 0$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$, also 0 ist eine untere Schranke. Wegen der Archimedischen Eigenschaft ist 0 die größte untere Schranke:

$$\inf(M_2) = 0.$$

Da $0 \notin M_2$ gibt es kein Minimum in M_2.

(c) Wir lösen zuerst die Gleichung $f(x) := x^2 + 3x + 1 = 0$, und finden die Lösungen

$$x_+ := -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \qquad x_- := -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Wir faktorisieren $f(x) = (x - x_+)(x - x_-)$ (Sie werden in der Algebra lernen dass man Polynome mit komplexen Koeffizienten immer eindeutig als Produkt linearer Faktoren schreiben kann; dieses Ergebnis wird hier aber nicht benutzt; vielmehr tun wir so als hätten wir die Faktorisierung geraten und anschließend ihre Korrektheit überprüft), und dann sehen wir dass

$$f(x) \leq 0 \iff (x \leq x_+ \wedge x \geq x_-) \vee (x \geq x_+ \wedge x \leq x_-).$$

Aber wegen $x_- < x_+$ ist die Aussage $(x \geq x_+ \wedge x \leq x_-)$ immer falsch, und deshalb ist $f(x) \leq 0$ genau dann wenn $x_- \leq x \leq x_+$. Wir konkludieren:

$$\sup(M_3) = \max(M_3) = x_+ = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \qquad \inf(M_3) = \min(M_3) = x_- = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

(d) Die Zahl 3 ist eine obere Schranke, denn für jedes $x \geq 3$ gilt $x^2 \geq 9$. Sei $s \in \mathbb{R}$ mit $s < 3$. Wegen Satz 3.31 existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $s < x < 3$, und dann gilt $s^2 < x^2 < 9$. Somit ist s keine obere Schranke für M_4, und deshalb ist 3 die kleinste obere Schranke:

$$\sup(M_4) = 3.$$

Da $3 \notin M_4$ gibt es kein Maximum in M_4. Ebenso zeigt man dass

$$\inf(M_4) = -3,$$

und dass es kein Minimum in M_4 gibt. □

Aufgabe 4. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Wir nehmen an dass $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$. Beweisen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n/b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, auch konvergiert, und dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Lösung. Wir benutzen die Rechenregeln aus Lemma 4.9. Seien $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Wegen der Annahme $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $b \neq 0$, folgt aus Lemma 4.9.(iii) dass $1/b_n$ gegen b konvergiert. Aus Lemma 4.9.(ii) konkludieren wir dann dass $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$ gegen $a/b = a(1/b)$ konvergiert. □

Aufgabe 5 (Konvergenz einer Folge). Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, wobei

$$a_n := \frac{n^2}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mittels zwei Methoden dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

(a) direkt anhand der in der Vorlesung gegebenen Definition der Konvergenz von Folgen. (4 Pkt.)

(b) anhand der Rechenregeln für Grenzwerte und des (aus der Vorlesung bekannten) Grenzwertes von $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. (4 Pkt.)

Lösung. (a) Wir zeigen direkt (anhand Definition 4.1) dass a_n gegen $a = 1$ konvergiert. Sei $\epsilon > 0$. Wegen der Archimedischen Eigenschaft existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \epsilon^{-1}$. Wir wählen nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n_0^2 + 1 \geq m$ (z.B. $n_0 = m$). Dann folgt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n - a| = a - a_n = 1 - \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n_0^2+1} \leq \frac{1}{m} < \epsilon.$$

(b) Diesmal benutzen wir die Rechenregeln aus Lemma 4.9:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \to 0 &\overset{4.9.(ii)}{\Longrightarrow} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0 \\ &\overset{4.9.(i)}{\Longrightarrow} 1 + \frac{1}{n^2} \to 1 + 0 = 1 \\ &\overset{4.9.(iii)}{\Longrightarrow} \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

□