Aufgabe 1 (Komplexe Zahlen). (a) Sei $z := \frac{1+4i}{2-3i}$. Berechnen Sie $\Re z$, $\Im z$ und $\bar{z}$. (3 Pkt.)

(b) Sei $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ die Eigenschaft $|z| \leq 1$ genau dann gilt, wenn $|z - c| \leq |1 - \bar{c}z|$. (4 Pkt.)

Hinweis: Sie dürfen die Rechenregeln vom Präsenzblatt 5, Aufgabe 2(a) frei benutzen.

Lösung. (a) Wir benutzen die Rechenregel $w\overline{w} = |w|^2$ für $w = 2 - 3i$ und berechnen

$$z = \frac{1+4i}{2-3i} = \frac{1+4i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2-12+8i+3i}{4+9} = \frac{1}{13}(-10+11i).$$

Es folgt

$$\Re z = -\frac{10}{13}, \qquad \Im z = \frac{11}{13}, \qquad \bar{z} = -\frac{1}{13}(10+11i).$$

(b) Wir berechnen mithilfe von den Rechenregeln für komplexe Konjugation zuerst

$$\begin{aligned} |1-\bar{c}z|^2 - |z-c|^2 &= (1-\bar{c}z)(1-c\bar{z}) - (z-c)(\bar{z}-\bar{c}) \\ &= 1 + |c|^2|z|^2 - \bar{c}z - c\bar{z} - |z|^2 - |c|^2 + z\bar{c} + c\bar{z} \\ &= (1-|c|^2)(1-|z|^2). \end{aligned}$$

Es folgt

$$|z-c| \leq |1-\bar{c}z| \iff |z-c|^2 \leq |1-\bar{c}z|^2 \iff (1-|c|^2)(1-|z|^2) \geq 0 \iff 1-|z|^2 \geq 0,$$

wobei wir in der letzten Schritt $|c| < 1$ benutzt haben. □

Aufgabe 2 (Konvergenz in Vektorräumen). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Konvergiert eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ gegen v, so konvergiert die Folge $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen $\|v\|$. (3 Pkt.)

(b) Die umgekehrte Implikation zu (a) gilt nicht, das heißt, aus der Konvergenz der Folge $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt nicht die Konvergenz der Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (2 Pkt.)

(c) Eine Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ mit $\vec{v}_n = (v_{n,j})_{j=1}^N$ konvergiert genau dann wenn für jedes $j \in \{1, \dots, N\}$ die Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. (3 Pkt.)

(d) Es gibt eine beschränkte[1] Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $V = (B(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ mit $\vec{v}_n = (v_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ sodass für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, aber die Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V nicht konvergiert. (2 Pkt.)

Lösung. (a) Für $x, y \in V$ folgt aus der Dreiecksungleichung dass $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$ und deshalb $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$. Vertauschen wir x und y, so folgt auch $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$ und deshalb gilt die 'umgekehrte Dreiecksungleichung'

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\|v - v_n\| < \epsilon$. Wenden wir die umgekehrte Dreiecksungleichung an mit $x = v$ und $y = v_n$, dann folgt auch

$$\big|\|v\| - \|v_n\|\big| \leq \|v - v_n\| < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Hiermit ist bewiesen dass $\|v_n\| \to \|v\|$ in $\mathbb{R}$.

[1]Ähnlich zu Definition 4.3, nennen wir eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ *beschränkt* falls die Menge $\{\|v_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Gegenbeispiel: sei $0 \neq v \in V$ und $v_n = (-1)^n v$. Dann ist die Folge $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant und deshalb konvergent, obwohl die Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(c) Sei $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$ mit Grenzwert $\vec{v} = (v_j)_{j=1}^N$, und $\epsilon > 0$. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\|\vec{v}_n - \vec{v}\|_2 < \epsilon$. Für jedes $1 \leq j \leq N$ folgt dann

$$|v_{n,j} - v_j| \leq \|\vec{v}_n - \vec{v}\|_2 < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$, und somit ist jede Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$.

Umgekehrt, seien $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq N$ mit Grenzwerten $v_j \in \mathbb{R}$, und $\epsilon > 0$. Dann existiert für jedes $1 \leq j \leq N$ ein $n_j \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_j$ gilt

$$|v_{n,j} - v_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{N}}.$$

Definieren wir $\vec{v} := (v_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ und $n_0 := \max_{1\leq j\leq N}(n_j)$, so folgt für alle $n \geq n_0$ dass

$$\|\vec{v}_n - \vec{v}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N |v_{n,j} - v_j|^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{j=1}^N \frac{\epsilon^2}{N}\right)^{1/2} = \epsilon,$$

und somit konvergiert $\vec{v}_n \to \vec{v}$ wenn $n \to \infty$.

(d) Für $n, j \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$v_{n,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \leq j, \\ 0, & \text{falls } n > j. \end{cases}$$

Dann ist klar dass für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $(v_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert. Aber für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$ gilt

$$\|\vec{v}_m - \vec{v}_n\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |v_{m,j} - v_{n,j}| \geq |v_{m,n} - v_{n,n}| = 1,$$

und somit ist die Folge $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht Cauchy und deshalb nicht konvergent. □

Aufgabe 3 (Nullfolge)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ und

$$x_n := \sum_{j=0}^n a_j + 1/a_j, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie dass $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. (5 Pkt.)

Lösung. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt $(a_j - 1)^2 \geq 0$. Hieraus folgt $a_j^2 + 1 \geq 2a_j$ und somit $a_j + 1/a_j \geq 2$. Deshalb ist $x_n \geq 2(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gegeben $\epsilon > 0$, wählen wir $n_0 > \frac{1}{2\epsilon}$, und dann folgt für alle $n \geq n_0$ dass

$$\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n_0} < \epsilon.$$

Hiermit haben wir gezeigt dass $1/x_n$ gegen 0 konvergiert. □

Aufgabe 4 (Reihenkonvergenz)**.** Bestimmen Sie für die nachfolgenden Reihen, ob sie jeweils konvergieren. Begründen Sie Ihre Antworte (Sie dürfen die Ergebnisse aus dem Skript bis einschließlich Abschnitt 6.1 und aus den Übungs- und Präsenzblättern benutzen).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3}$. (2 Pkt.)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^n}{(3n^2+8n+1)^n}$. (2 Pkt.)

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. (2 Pkt.)

Lösung. (a) Aus Lemma 4.10 wissen wir dass $n^3/3^n$ gegen Null konvergiert, und deshalb gilt $3^n/n^3 \to \infty$ wenn $n \to \infty$. Insbesondere ist die Folge $(3^n/n^3)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ keine Nullfolge, und es folgt (Präsenzblatt 4, Aufgabe 4(a)) dass die Folge der Partialsummen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ nicht konvergiert. Also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ konvergiert nicht.

(b) Für jedes $n \geq 2$ gilt die Ungleichung

$$\frac{n^2}{n^3+3} = \frac{1}{n+3/n^2} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Da die Reihe $\sum_n 1/n$ nicht konvergiert (Lemma 6.10), folgt aus Lemma 6.8 dass die Reihe $\sum_n \frac{n^2}{n^3+3}$ auch nicht konvergiert.

(c) Für jedes $n \geq 1$ gilt die Ungleichung

$$\frac{(n^2+1)^n}{(3n^2+8n+1)^n} = \left(\frac{1+1/n^2}{3+8/n+1/n^2}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Wir wissen aus Lemma 6.4 dass die geometrische Reihe $\sum_n (2/3)^n$ konvergiert, und dann folgt aus Lemma 6.8 dass die Reihe $\sum_n \frac{(n^2+1)^n}{(3n^2+8n+1)^n}$ auch konvergiert.

(d) Es folgt aus Lemma 6.10 dass die Reihe $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert. □

Aufgabe 5 (Reihenkonvergenz)**.** Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

Lösung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} a_n := (1-x)\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - (n+1)x^{n+1}. \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe konvergiert gegen $1/(1-x)$ (Lemma 6.4), und $(n+1)x^{n+1} \to 0$ (Lemma 4.10). Es folgt

$$(1-x)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - \lim_{n\to\infty}(n+1)x^{n+1} = \frac{1}{1-x}.$$

□

Aufgabe 6 (Cauchyfolgen)**.** Sei (M, d) ein metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn $\sum_n d(a_n, a_{n+1})$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ ist, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M. (3 Pkt.)

(b) Wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $d(a_n, a_{n+1}) \leq (3/4)^n$ gilt, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M. (2 Pkt.)

Lösung. (a) Sei $\sum_n d(a_n, a_{n+1})$ eine konvergente Reihe und $\epsilon > 0$. Aus dem Cauchy-Kriterium für Reihen (Proposition 6.11) folgt dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert sodass für alle $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n_0 < n \leq n'$ gilt

$$\sum_{j=n}^{n'} d(a_j, a_{j+1}) < \epsilon.$$

Benutzen wir die Dreiecksungleichung $(n' - n)$-mal, so folgt

$$d(a_n, a_{n'}) \leq \sum_{j=n}^{n'} d(a_j, a_{j+1}) < \epsilon,$$

und hiermit ist bewiesen dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M ist.

(b) Ist $d(a_n, a_{n+1}) \leq (3/4)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus Lemma 6.8 und Lemma 6.4 dass $\sum_n d(a_n, a_{n+1})$ konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}) \overset{6.8}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} (3/4)^n \overset{6.4}{=} \frac{1}{1 - 3/4} = 4.$$

Aus Teilaufgabe (a) folgt schließlich dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in M ist. □