Aufgabe 1 (Konvergenz von Reihen)**.** Bestimmen Sie mit Beweis, ob die nachfolgenden Reihen konvergieren. Sie dürfen die Ergebnisse aus dem Skript bis einschließlich Abschnitt 6.2 und aus den Übungs- und Präsenzblättern benutzen.

(a) $\sum_k \left(\frac{k-2}{2k-1}\right)^{3k}$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_k \frac{(2k)!}{7^k}$. (2 Pkt.)

(c) $\sum_k \frac{9k-1}{3k^3+5}$. (2 Pkt.)

(d) $\sum_k \frac{k^k}{k!}$. (2 Pkt.)

(e) $\sum_k \frac{4k^4}{(2k^2+5)3^k}$. (2 Pkt.)

(f) $\sum_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n n!}$. (2 Pkt.)

Lösung. (a) Wir wenden das Wurzelkriterium an: Für $k \geq 2$ gilt

$$\sqrt[k]{\left(\frac{k-2}{2k-1}\right)^{3k}} = \left(\frac{k-2}{2k-1}\right)^3 \leq \left(\frac{k-\frac{1}{2}}{2k-1}\right)^3 = \frac{1}{2^3} < 1.$$

Somit folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{k-2}{2k-1}\right|^{3k}} < 1$ und deshalb ist die Reihe konvergent.

(b) Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\frac{(2k+2)!}{7^{k+1}} \cdot \frac{7^k}{(2k)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)}{7} > 1.$$

Mittels Induktion folgt $\frac{(2k)!}{7^k} \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Deshalb gilt $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{7^k} \geq n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wir sehen dass die Reihe divergiert.

(c) Wir vergleichen die Reihe mit $\sum_k 1/k^2$: Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{9k-1}{3k^3+5} \cdot \left(\frac{1}{k^2}\right)^{-1} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{9k}{3k^3} \cdot k^2 = 3.$$

Da die Reihe $\sum_k 1/k^2$ konvergiert (Lemma 6.10), folgt aus dem Vergleichskriterium dass auch $\sum_k \frac{9k-1}{3k^3+5}$ konvergiert.

(d) Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \geq 1.$$

Wie in Teilaufgabe (b) folgt dass die Reihe divergiert.

(e) Wir wenden das Wurzelkriterium an: Für $k \geq 1$ gilt

$$\sqrt[k]{\frac{4k^4}{(2k^2+5)3^k}} = \frac{\sqrt[k]{4}\sqrt[k]{k}^4}{\sqrt[k]{(2k^2+5)}3} \leq \frac{\sqrt[k]{4}\sqrt[k]{k}^4}{\sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k}^2\, 3} \to \frac{1}{3} < 1,$$

wobei wir für die Konvergenz Lemma 6.19 und Präsenzblatt 6, Aufgabe 1 benutzt haben. Somit folgt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{4k^4}{(2k^2+5)3^k}\right|} < 1$ und deshalb ist die Reihe konvergent.

(f) Da $\sum_k 1/k$ divergiert (Lemma 6.10) und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n n!} > \frac{1}{k}$ für alle $k \geq 1$, folgt aus dem Majorantenkriterium dass auch $\sum_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n n!}$ divergiert. □

Aufgabe 2 (Verschärftes Quotientenkriterium). Sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_j a_j$ konvergiert, falls es ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\theta > 1$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \leq 1 - \frac{\theta}{j+1}, \qquad \text{für alle } j \geq N. \qquad \text{(6 Pkt.)}$$

Hinweis: benutzen Sie die Bernoulli-Ungleichung vom Präsenzblatt 6, Aufgabe 2.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_j a_j$ divergiert, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \geq 1 - \frac{1}{j+1}, \qquad \text{für alle } j \geq N. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

(c) Vergleichen Sie die Aussage in Teilaufgabe (a) mit dem Quotientenkriterium. Was stellen Sie fest? (1 Pkt.)

Lösung. (a) Seien $j \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{Q}_{\geq 1}$. Dann folgt aus der Bernoulli-Ungleichung für rationale Exponenten (Präsenzblatt 6) die Ungleichung

$$1 - \frac{q}{j+1} = 1 + q\left(-\frac{1}{j+1}\right) \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \left(1 - \frac{1}{j+1}\right)^q = \left(\frac{j}{j+1}\right)^q. \qquad (*)$$

Seien nun $\theta \in \mathbb{R}$ mit $\theta > 1$ und $N \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ so, dass

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \leq 1 - \frac{\theta}{j+1}, \qquad \text{für alle } j \geq N.$$

Mithilfe von Satz 3.31 wählen wir $q \in \mathbb{Q}$ mit $1 < q < \theta$, und dann folgt für alle $j \geq N$

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} \leq 1 - \frac{\theta}{j+1} \leq 1 - \frac{q}{j+1} \overset{(*)}{\leq} \left(\frac{j}{j+1}\right)^q.$$

Hieraus folgt mittels Induktion dass für alle $j \geq N$ gilt

$$a_j \leq \frac{N^q a_N}{j^q}.$$

Wegen $q > 1$ ist die Reihe $\sum_j 1/j^q$ konvergent (Lemma 6.10), und wir folgern aus dem Vergleichskriterium dass auch die Reihe $\sum_j a_j$ konvergent ist.

(b) Aus der Annahme $\frac{a_{j+1}}{a_j} \geq \frac{j}{j+1}$ folgt nun mittels Induktion dass

$$a_j \geq \frac{N a_N}{j} \qquad \text{für alle } j \geq N.$$

Da die Reihe $\sum_j 1/j$ divergiert, folgt nun dass die Reihe $\sum_j a_j$ auch divergiert.

(c) Die Voraussetzung des Quotientenkriteriums ist die Ungleichung

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} < 1.$$

Diese Aussage impliziert die Voraussetzung der Teilaufgabe (a), sodass die Teilaufgabe (a) auf mehr Reihen anwendbar ist als das Quotientenkriterium.

□

Aufgabe 3 (Lemma 6.20)**.** Sei (a_j) eine Folge in $\mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq \limsup_{j\to\infty} a_j^{1/j} \leq \limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j}, \qquad \text{(5 Pkt.)}$$

wobei die Grenzwerte in $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ genommen werden, also $+\infty$ sein dürfen.

Lösung. Wir betrachten den Fall

$$0 < \liminf_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j}, \quad \limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} < \infty$$

und zeigen beide Ungleichungen parallel. Falls $\liminf_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = 0$ oder $\limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} = \infty$ gilt, dann ist die zugehörige Ungleichung klar, und wir lassen den jeweiligen Teil des Beweises weg.
Seien $A, B \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$A < \liminf_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} \quad \text{und} \quad \limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} < B. \qquad (*)$$

Dann existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $j \geq j_0$ gilt

$$A < \frac{a_{j+1}}{a_j} < B.$$

Mittels Induktion folgt für alle $k \geq j_0$ dass

$$A^{k-j_0} < \frac{a_k}{a_{j_0}} < B^{k-j_0}.$$

Hieraus folgt

$$A\sqrt[k]{a_{j_0}/A^{j_0}} = \sqrt[k]{a_{j_0}A^{k-j_0}} < \sqrt[k]{a_k} < \sqrt[k]{a_{j_0}B^{k-j_0}} = B\sqrt[k]{a_{j_0}/B^{j_0}}.$$

Nehmen wir $k \to \infty$ und benutzen wir $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x} = 1$ für reelle Zahlen $x > 0$ (siehe Präsenzblatt 6, Aufgabe 1), so folgt

$$A = \lim_{k\to\infty} A\sqrt[k]{a_{j_0}/A^{j_0}} \leq \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \leq \lim_{k\to\infty} B\sqrt[k]{a_{j_0}/B^{j_0}} = B.$$

Da diese Ungleichungen für alle A, B wie in (*) gelten, folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4 (Konvergenz von Potenzreihen)**.** Berechnen Sie den Konvergenzradius für die folgenden Potenzreihen, und geben Sie an für welche $x \in \mathbb{C}$ diese Potenzreihen konvergieren.

(a) $\sum_n \frac{4^n}{n!} x^n$. (2 Pkt.)

(b) $\sum_n (-1)^{n-1} n^n x^n$. (2 Pkt.)

(c) $\sum_n n^2 9^n x^n$. (3 Pkt.)

(d) $\sum_n (10 + 1/n)^n x^n$. (3 Pkt.)

Lösung. (a) Wir berechnen zuerst

$$\frac{4^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{4^{n+1}} = \frac{n+1}{4}.$$

Wir berechnen dann den Konvergenzradius mittels Lemma 6.22:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4} = \infty.$$

Somit konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{C}$.

(b) Wir berechnen den Konvergenzradius direkt aus der Definition:

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|(-1)^{n-1} n^n\right|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |n|} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Somit konvergiert die Potenzreihe genau dann wenn $x = 0$.

(c) Wir berechnen den Konvergenzradius direkt aus der Definition:

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|n^2 9^n\right|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} 9\sqrt[n]{n}^2} = \frac{1}{9},$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 6.19 benutzt haben. Eine Reihe $\sum_n a_n$ kann nur konvergieren, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Aber wenn $|x| = \frac{1}{9}$, so gilt für alle $n \geq 1$

$$|n^2 9^n x^n| = n^2,$$

und deswegen konvergiert die Reihe nicht. Somit konvergiert die Potenzreihe wenn $|x| < \frac{1}{9}$ und divergiert sie wenn $|x| \geq \frac{1}{9}$.

(d) Wir berechnen den Konvergenzradius direkt aus der Definition:

$$\rho := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left|(10 + \frac{1}{n})^n\right|^{1/n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |10 + \frac{1}{n}|} = \frac{1}{10}.$$

Wenn $|x| = \frac{1}{10}$, so gilt für alle $n \geq 1$

$$|(10 - 1/n)^n x^n| = (1 + 1/(10n))^n > 1,$$

und deswegen konvergiert die Reihe in diesem Fall nicht. Somit konvergiert die Potenzreihe wenn $|x| < \frac{1}{10}$ und divergiert sie wenn $|x| \geq \frac{1}{10}$. □

Aufgabe 5 (Cauchy-Produktformel). (a) In Aufgabe 5 vom Übungsblatt 6 haben wir schon die Gleichheit

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$ (5 Pkt.)

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ bewiesen. Geben Sie jetzt einen neuen Beweis dieser Gleichheit mithilfe der Cauchy-Produktformel.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$\sum_n (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \qquad \text{(2 Pkt.)}$$

Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ und für den Wert $C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ die Identität

$$2C(x)^2 = C(2x) + 1. \qquad \text{(3 Pkt.)}$$

Erkennen Sie die Funktion C?

Lösung. (a) Wir benutzen den bekannten Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ der geometrischen Reihe (Lemma 6.4) und die Cauchy-Produktformel (CP):

$$\frac{1}{(1-x)^2} \overset{6.4}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right) \overset{\text{CP}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} x^j x^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

(b) Die Reihe konvergiert absolut wegen des Quotientenkriteriums: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ gilt

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} < \frac{1}{4}.$$

Wir berechnen nun mithilfe von der Cauchy-Produktformel

$$\begin{aligned}
2C(x)^2 &= 2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\Big)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}\Big) \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} (-1)^{k-j} \frac{x^{2(k-j)}}{(2(k-j))!} \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(2j)!(2(k-j))!} \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{2k} \binom{2k}{j}.
\end{aligned}$$

Aus dem Binomialformel folgt für alle $k \geq 1$

$$2^{2k} = (1+1)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \qquad \text{und} \qquad 0 = (1-1)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j}.$$

Addieren wir beide Gleichungen, dann bekommen wir für $k \geq 1$

$$2^{2k} = 2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{2k} \binom{2k}{j}. \qquad (*)$$

Hieraus folgt also

$$
\begin{aligned}
2C(x)^2 &= 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ gerade}}}^{k} \binom{2k}{j} \\
&\overset{(*)}{=} 2 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} \\
&= 1 + C(2x).
\end{aligned}
$$

Schließlich erkennen wir $C(x)$ als die Kosinusfunktion. $\square$