Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 4. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Welche der folgenden Mengen K mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ bilden einen Körper? Begründe die Antwort und gib jeweils an welche Körperaxiome (bzw. Unterkörper Axiome) gelten. Sie dürfen dabei verwenden, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Körper sind.

(a) $(K, +, \cdot) = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$;

(b) $K = \{x + y \cdot i \mid x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$, wobei $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{C}$ induziert werden;

(c) $K = \{x + y \cdot i \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$, wobei $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{C}$ induziert werden;

(d) $K = \{x + y \cdot i \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$, wobei $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{C}$ induziert werden;

(e) $K = \{x + y \cdot \sqrt{6} \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$, wobei $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{R}$ induziert werden;

Aufgabe 2. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeige, dass für alle $x, y \in K$, $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ gilt.

Aufgabe 3. Konstruiere explizit einen Körper mit 4 Elementen. Betrachte dazu die Menge $K := \{0, 1, x, y\}$, wobei x und y formale Symbole darstellen und definiere die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ geeignet. Sind diese Verknüpfungen eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4. (a) Zeige, dass jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel besitzt.

(b) Zeige allgemeiner, dass für komplexe Zahlen $a, b, c \in \mathbb{C}$, die quadratische Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

eine Lösung $x \in \mathbb{C}$ hat, falls $a \neq 0$.

Aufgabe 5. Identifiziere die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, wobei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ der komplexen Zahl $x_1 + x_2 \cdot i$ entspricht. Zeige, dass die Multiplikationsabbildung mit i, d.h. die Abbildung $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto i \cdot z$, einer Rotation um $90°$ entspricht.

Aufgabe 6. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper der nur endlich viele Elemente besitzt. Zeige, dass $\mathrm{char}(K) > 0$.