Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 13
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Eigenschaften der Determinante*
Sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Sei weiterhin $A \in M(n \times n, K)$ und bezeichne mit $s_i \in K^n$ die i-te Spalte on A. Wir scheiben in dieser Situation auch $A = (s_1 \dots s_n)$.

(a) Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition.
Zeige: $\det(s_{\tau(1)} \dots s_{\tau(n)}) = -\det(A)$.

(b) Sei $a \in K$ und $1 \leq j < k \leq n$. Wir definieren $s'_j := s_j + a \cdot s_k$ und $s'_i := s_i$ für $i \neq j$.
Zeige: $\det(s'_1 \dots s'_n) = \det(A)$.

(c) Sei $a \in K$ und $1 \leq j \leq n$. Wir definieren $s'_j := a \cdot s_j$ und $s'_i := s_i$ für $i \neq j$. Zeige: $\det(s'_1 \dots s'_n) = a \cdot \det(A)$.

(d) Sei A eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.
Zeige: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

Bemerkung: Aus der Vorlesung ist $\det(A) = \det(A^T)$ bekannt. Obige Aussagen bleiben also richtig, wenn man Spaltenumformungen durch Zeilenumformungen ersetzt. Zusammen mit dem Gauß–Verfahren liefert Aufgabe 1 somit einen alternativen Beweis der folgenden Aussage aus der Vorlesung:
$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1, \dots, s_n$ linear unabhängig.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Vandermondsche Determinante*
Sei K ein Körper, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $a_1, \dots, a_n \in K$. Die Vandermondsche Determinante ist gegeben durch

$$V(a_1, \dots, a_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Benutze Aufgabe 1 um folgende Formel zu beweisen:

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 3. Februar 2017**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Determinanten schiefsymmetrischer Matrizen*
Sei K ein Körper dessen Charakteristik von 2 verschieden ist: $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei weiterhin $n \geq 1$ eine ungerade natürliche Zahl und sei $A \in M(n \times n, K)$ eine schiefsymmetrische $n \times n$ Matrix, d.h. $A^T = -A$. Berechne die Determinante von A.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Die alternierende Gruppe*
Sei $n \geq 1$ eine positive natürliche Zahl. Wir betrachten die Teilmenge

$$A_n := \{\pi \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\pi) = 1\}$$

der symmetrischen Gruppe S_n.

(a) Zeige, dass A_n eine Untergruppe von S_n ist. Ist A_4 abelsch?

(b) Zeige, dass für alle $\pi \in S_n$ und $\tau \in A_n$, $\pi \circ \tau \circ \pi^{-1} \in A_n$ gilt.

(c) Zeige, dass

$$\pi_1 \sim \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1 \circ \pi_2^{-1} \in A_n, \quad \text{für} \quad \pi_1, \pi_2 \in S_n.$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge S_n ist.

(d) Bestimme die Anzahl der Elemente von A_n.

(Tipp: Untersuche die Mächtigkeit der Äquivalenzklassen aus Teil (c).)

Bemerkung: Aufgabe 4(b) besagt, dass die Untergruppe A_n von S_n ein sogenannter *Normalteiler* ist. Man kann dies benutzen, um zu zeigen, dass die Menge der Äquivalenzklassen $S_n/\sim$ eine Gruppe bildet. In der Tat kann man leicht nachprüfen, dass die Eigenschaft $\pi \circ \tau \circ \pi^{-1} \in A_n$ für alle $\pi \in S_n$ und $\tau \in A_n$, genau die Bedingung ist, die man benötigt, um den in der Vorlesung vorgestellten Beweis im Fall von Untergruppen von abelschen Gruppen auf Normalteiler von allgemeinen Gruppen zu verallgemeinern.

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`

- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.

- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.

- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.

- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.

- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.