Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Weihnachtszettel mit klausurartigen Aufgaben zum Üben
Lineare Algebra 1

Bemerkung: Die folgenden Aufgaben sollen dazu dienen verschiedene Aspekte aus dem bisher behandelten Stoff zu wiederholen. Die Aufgaben sind dabei so gewählt, wie sie auch in einer Klausur gestellt werden könnten. Die angegebenen Punkte dienen lediglich als Orientierung; die Lösungen werden **nicht** eingesammelt und **nicht** bewertet/korrigiert. Es wird empfohlen die Aufgaben in den Ferien (24.12.2016–08.01.2017) selbstständig zu bearbeiten. Die Lösungen werden in der ersten Woche nach den Ferien in den Tutorien besprochen.

Aufgabe 1. (12 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe jede Antwort kurz.

(i) $(\mathbb{N}, +) \subset (\mathbb{Z}, +)$ ist eine Untergruppe.

(ii) Sei M eine Menge. Die Menge $\mathrm{Abb}^{bij}(M, M)$ aller bijektiven Abbildungen $f : M \longrightarrow M$ zusammen mit der Komposition von Abbildungen bildet eine Gruppe.

(iii) Jede Gruppe ist abelsch.

(iv) Die Vereinigung zweier Untergruppen einer Gruppe $(G, \circ)$ ist wieder eine Untergruppe von $(G, \circ)$.

(v) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann hat jede Äquivalenzklasse in G/H gleich viele Elemente.

(vi) Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann hat jede Äquivalenzklasse bezüglich $\sim$ gleich viele Elemente.

Aufgabe 2. (12 Punkte)
Im folgenden bezeichne K einen Körper, und V und W jeweils einen K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch? Begründe die Antwort jeweils kurz.

(i) Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, d.h. $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$, wenn f nicht surjektiv ist.

(ii) Falls $\dim_K(V) < \infty$, so ist jede injektive K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ bijektiv.

(iii) Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Jede injektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist bijektiv.

(iv) Für jedes $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $m \leq \dim_K(V)$ gibt es einen Untervektorraum $U \subset V$ mit $\dim_K(V/U) = m$.

(v) Es gilt $\dim_K(V) = \max\{\dim_K(U) \mid U \subset V \text{ ein Untervektorraum}\}$.

(vi) Es gilt $\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V, W)) = \dim_K(\mathrm{Hom}_K(W, V))$.

Aufgabe 3. (10 Punkte)
Welche der folgenden Teilmengen U von $\mathbb{R}^3$ bzw $\mathbb{R}^4$ bilden einen $\mathbb{R}$-linearen Untervektorraum? Begründe die Antwort jeweils kurz.

(i) $U := \{(x+y, x-y, x \cdot y, 7x) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$;

(ii) $U := \{(x+y, x-y, 7x) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;

(iii) $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ y-3z+x=0\} \subset \mathbb{R}^3$;

(iv) $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y)^2 + (y-3z+x)^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$;

(v) $U := \{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid w^2 + xy + z = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)
Betrachte im folgenden jeweils den angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit der angegebenen Teilmenge $M \subset V$ und entscheide ob es sich dabei um eine Basis von V handelt. Begründe die Antwort jeweils kurz.

(i) $V = \mathbb{R}^2$, $M := \{(1,0), (0,1), (0,0)\}$;

(ii) $V = \mathbb{R}^2$, $M := \{(1,2), (3,5)\}$;

(iii) $V = \mathbb{R}^3$, $M := \{(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$;

(iv) $V = \mathbb{R}^n$, $M := \{(k, k^2, k^3, \ldots, k^n) \mid k = 1, \ldots, n-1\}$;

(v) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $M := \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei $f_i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f_i(n) = 0$ falls $n < i$ und $f_i(n) = 1$ falls $n \geq i$.

Aufgabe 5. (10 Punkte)
Sei K ein Körper und seien U_1 und U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V.

(i) Zeige, dass $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ jeweils ein Untervektorraum von V ist.

(ii) Formuliere die Dimensionsformel für Untervektorräume, welche $\dim_K(U_1 + U_2)$ berechnet.

(iii) Beweise die Dimensionsformel aus Teil (ii). (Bis auf die zu zeigende Dimensionsformel, darf dabei alles was in der Vorlesung bewiesen wurde verwendet werden; das verwendete Resultat aus der Vorlesung muss dabei aber klar formuliert werden.)

Aufgabe 6. (10 Punkte)
Sei K ein Körper und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Seien $U \subset V$ und $Z \subset W$ Untervektorräume mit $f(U) \subset Z$. Zeige, dass es genau eine K-lineare Abbildung $\overline{f} : V/U \longrightarrow W/Z$ gibt, sodass das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[d, "q"] \\ V/U \arrow[r, "\overline{f}"'] & W/Z \end{tikzcd}$$

wobei $p : V \longrightarrow V/U$ und $q : W \longrightarrow W/Z$ die kanonischen Abbildungen sind.