§2. Die Fredholm-Alternative

E Hilbert $\quad K: E \to E$ kompakt $\quad I = \mathrm{id}: E \to E$

$\quad K^*$ adjungiert $\quad I^* = I$

$$(I_a): \quad (I - K)x = a \qquad a \in E$$
$$(H): \quad (I - K)x = 0$$
$$(H^*): \quad (I - K^*)x = 0$$

Theorem 2.1 (Fredholm-Alternative) i) die Lösungsräume H und H^* von (H) bzw (H^*) sind endlichdimensional von derselben Dimension

$$d_H = \dim H = \dim H^*$$

ii) D.u.n.d. wenn $d_H = 0$, ist I_a für jedes a eindeutig lösbar, mit

$$x = [I - K]^{-1}a, \quad \text{stetig linear}$$

iii) (I_a) lösbar (für ein a) ⟺ $a \perp H^*$

Beweis. 1. Schritt: Es sei $\dim E < \infty$. Dann ist alles in der Theorie linearer Gleichungssysteme enthalten. Insbesondere beachte: $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$ für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

2. Schritt. K sei ein endlicher Operator

Wähle ONB $e_1, e_2, \ldots$ von E, so daß $[e_1, \ldots, e_n] = \operatorname{Im} K$. Setze

$$f_1, \ldots, f_n = K^* e_1, \ldots, K^* e_n \in \operatorname{Im} K^*$$

Jetzt gilt:

$$(1) \quad Kx = \sum_{\nu=1}^{n} \langle Kx, e_\nu \rangle e_\nu = \sum \langle x, K^* e_\nu \rangle e_\nu = \sum \langle x, f_\nu \rangle e_\nu$$

$$(1') \quad K^* x = \sum_{\nu=1}^{n} \langle x, e_\nu \rangle f_\nu$$

Beweis von $(1')$. $y \in E$:

$$\langle y, K^* x \rangle = \langle Ky, x \rangle = \sum \langle y, f_\nu \rangle \langle e_\nu, x \rangle = \sum \langle y, \langle x, e_\nu \rangle f_\nu \rangle = \langle y, \sum \langle x, e_\nu \rangle f_\nu \rangle$$

Hilfsaussage: Die f_ν sind l. u., $\operatorname{Im} K^* = [f_1, \ldots, f_n]$

„l. u.“ $\quad \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f_\nu = 0 \qquad K e'_\mu = e_\mu$

$$0 = \sum \langle \lambda_\nu f_\nu, e'_\mu \rangle = \sum \lambda_\nu \langle K^* e_\nu, e'_\mu \rangle = \sum \lambda_\nu \langle e_\nu, K e'_\mu \rangle = \sum \lambda_\nu \delta_{\nu\mu} = \lambda_\mu$$

Hilfsaussage $\quad H \subset \operatorname{Im} K$

$\qquad H^* \subset \operatorname{Im} K^*$

Denn

$$(I-K)x=0 \Leftrightarrow x=Kx$$
$$(I-K^*)x=0 \Leftrightarrow x=K^*x$$

Nun sei

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} K &\xrightarrow[\sim]{\varepsilon} \mathbb{K}^n \\ \operatorname{Im} K^* &\xrightarrow[\varphi]{\sim} \mathbb{K}^n \end{aligned} \Bigg\} \text{ Basiswahlen } e_\nu \text{ bzw } f_\nu$$

Hilfsaussage: Unter ε geht H über in den Lösungsraum von

$$(\tilde{H}) \quad \sum \left(\delta_{ij} - \langle e_i, f_j \rangle\right) \xi_i = 0$$

H^* in

$$(\tilde{H}^*) \quad \sum \left(\delta_{ij} - \langle e_j, f_i \rangle\right) \xi_i = 0$$

Beweis. Sei $x = Kx$, also
$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i .$$

Andererseits nach (4)

$$x = \sum \langle x, f_i \rangle e_i$$

Also:

$$x = \sum_i \langle x, f_i \rangle e_i$$

$$= \sum_{i,j} \langle \xi_j e_j, f_i \rangle e_i = \sum_{i,j} \xi_j \langle e_j, f_i \rangle e_i$$

$$\cancel{= \sum_j \xi_j e_j = \sum_{i,j} \delta_{ij}}$$

$$= \sum_i \xi_i e_i$$

Damit

$$\xi_i - \sum_j \xi_j \langle e_j, f_i \rangle = 0$$

$$\sum_j \left(\delta_{ij} - \langle e_j, f_i \rangle\right) \xi_j = 0 \qquad i = 1 \ldots n$$

Entsprechend für H^*:

$$\sum_j \left(\delta_{ij} - \langle f_i, e_j \rangle\right) \xi_j = 0$$

Folgerung: $\dim H = \dim H^*$

Hilfsaussage: I_a lösbar durch x ⇔

$$x = a + \sum \xi_j e_j,$$

ξ_j das lin. Glgsystem

$$(I_a): \sum_j \left(\delta_{ij} - \langle e_j, f_i \rangle\right) \xi_j = \langle a, f_i \rangle$$

Die ξ_j wie eben, d. Lösung von $\tilde{I}_a$,
d. h. $\|\xi\| \leq \text{const} \|a\|$.

$\leadsto \quad \|x\| \leq \text{const} \|a\|$.

Damit ist Aussage 2) bewiesen.

Zu Aussage 3) Bedingung notwendig:

$$(I - K)x = a, \quad y : (I - K^*)y = 0.$$

$$\leadsto \langle a, y \rangle = \langle (I-K)x, y \rangle$$
$$= \langle x, (I - K^*)y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$$

„Hinreichend": I_a lösbar $\Leftrightarrow$ $\tilde{I}_a$ lösbar

$$\Leftrightarrow \left(\langle a, f_j \rangle \right)_{j=1 \dots m} \perp \tilde{H}^*$$

$$\Leftrightarrow \sum_j \langle a, f_j \rangle \overline{\xi_j} = 0 \quad \text{für } (\xi) \in \tilde{H}^*$$

$$\Leftrightarrow \langle a, \sum \xi_j f_j \rangle = 0 \quad - \xi \in \tilde{H}^*$$

$$\Leftrightarrow \langle a, y \rangle = 0 \quad y \in H^*$$

3. Schritt. Der allgemeine Fall

Hilfsatz. $T : E \to E$ linear, $\|T\| < 1$.
Dann ist $I - T$ invertierbar

Beweis. Definiere

$$\tilde{T}x = \sum_{j=0}^{\infty} T^j x = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} T^j x$$

$T^j = \underbrace{T\circ T\circ \cdots \circ T}_{j \text{ mal}}$ Limes existiert wegen $\|T\|<1$.

$$\Big\| \sum_{j=0}^{N} T^j x \Big\| \le \sum_{j=0}^{N} \|T^j x\| \le \sum_{j=1}^{N} \|T\|^j \|x\|$$

$$\le \frac{1}{1-\|T\|}\|x\|$$

$$\rightsquigarrow \quad \|\tilde{T}x\| \le \frac{1}{1-\|T\|}\|x\|$$

$$(I-T)\circ(I+T+\dots+T^N) = I - T^{N+1}$$

$$\rightsquigarrow \quad (I-T)\tilde{T} = I = \tilde{T}(I-T). \qquad \square$$

Wähle nun K_0 endlich, mit

$$\|A\| = \|K-K_0\| < 1,$$

also $I-K = I-K_0-A$. Es ist

$$(I+K)x = e$$

$$\Leftrightarrow \quad (I-A)^{-1}(I-K)x = (I-A)^{-1}e$$

$$\Leftrightarrow \quad (I-A)^{-1}(I-A-K_0)x = (I-A)^{-1}e$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big(I - \underbrace{(I-A)^{-1}K_0}_{\text{endlich}}\Big)x = (I-A)^{-1}e$$

damit ist man im Feld.