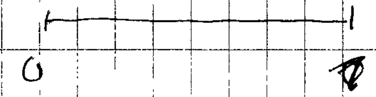
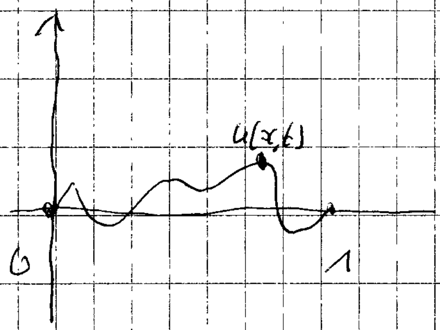
§ 4. Die schwingende Saite

(1)  Saite

$y = u(x,t)$



Gleichung für u:

Kraft auf einen Punkt $\sim$ Krümmung von u:

$$\text{Kraft} \sim \frac{u_{xx}}{\left(\sqrt{1+u_x^2}\right)^3} \sim u_{xx}$$

$\sim$ Beschleunigung u_{tt}. Also

$$(S) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Setze $c = 1$ (das ist eine Maßstabsfrage).

Anfangs-Rand-bedingungen

$$\cancel{(R) \quad u(1,t) = u(0) = 0}$$
$$\cancel{(A) \quad u(x,0) = f(x)}$$
$$\cancel{u_x(x,0) = g(x)}$$

(R) $u(0,t) = u(1,t) = 0$

(A) $u(x,0) = f(x)$
$u_t(x,0) = g(x)$

f und g hinreichend oft differenzierbar

PROBLEM: Löse!

(2) Theorem 1. u ist durch (S) (R) (A) eindeutig bestimmt.

Beweis. Zeige: Wenn $f \equiv g \equiv 0$, dann ist $u \equiv 0$.

$$v(x,t) = \int_0^t u(x,\tau)\,d\tau$$

$$\rightsquigarrow \quad v_t(x,t) = u(x,t)$$
$$v_{tt}(x,t) = u_t(x,t)$$
$$v_x(x,t) = \int_0^t u_x(x,\tau)\,d\tau$$

$$v_{xx}(x,t) = \int_0^t u_{xx}(x,\tau)\,d\tau$$
$$= \int_0^t u_{tt}(x,\tau)$$
$$= u_t(x,t) - \underbrace{u_t(x,0)}_{0}$$
$$= v_{tt}(x,t)$$

Also: v erfüllt (S).

Damit:

$$v_t \, v_{\tau\tau} = v_\tau \, v_{xx}$$

$$\int_0^t v_\tau \, v_{\tau\tau} \, d\tau = \int_0^t v_t \, v_{xx} \, d\tau$$

$$\frac{1}{2} v_t^2(x,t) = \int_0^t v_\tau \, v_{xx} \, d\tau$$

(beachte: $v_t(x,0) = u(x,0) = 0$)

Integriere bezüglich x:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 v_t(x,t)^2 \, dx = \int_0^1 \int_0^t v_\tau(x,\tau) \, v_{xx}(x,\tau) \, d\tau \, dx$$

$$= \int_0^t \int_0^1 \ldots \ldots \quad dx \, d\tau$$

partielle Integration im inneren Integral:

$$\int_0^1 = \underbrace{v_x(x,\tau) \, v_\tau(x,\tau) \Big|_{x=0}^{x=1}}_{=0} - \int_0^1 v_x(x,\tau) \, v_{\tau x}(x,\tau) \, dx$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2} \int_0^1 v_t(x,t)^2 \, dx = - \int_0^1 \int_0^t v_x(x,\tau) \, v_{\tau x}(x,\tau) \, d\tau \, dx$$

nochmals partielle Integration

$$\int_0^t v_{\tau x} v_x \, d\tau = v_x^2 \Big|_0^t - \int_0^t v_x v_{\tau x} \, d\tau$$

d.h.

$$\int_0^t v_{\tau x} v_x \, d\tau = \frac{1}{2} \Big(v_x^2(x,t) - \underbrace{v^2(x,0)}_{=0} \Big)$$

$$= \frac{1}{2} v_x(x,t)^2$$

Folglich:

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 v_t(x,t)^2 \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 v_x(x,t)^2 \, dx \leq 0$$

Damit sind beide Integrale 0; also
$v_t(x,t) \equiv 0 = u(x,t)$.

③ Existenz von Lösungen: „Trennung der Variablen“

$$u(x,t) = X(x)\, T(t)$$
$$u_{xx} = X''(x)\, T(t)$$
$$u_{tt} = X\, T''(t)$$

$$\text{(S)} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \quad \in \mathbb{R}$$

(denn links unabhängig von t, rechts von x)

Also

(SL) $\qquad X'' + \lambda X = 0$

(R) $\qquad X(0) = 0 = X(1)$

Lösungsraum (SL) aufgespannt durch

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x, \qquad \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Berücksichtige (R): $X(0)=0 \rightsquigarrow$ nur Vielfache von $\sin\sqrt{\lambda}\,x$ kommen in Frage.

$$X(1)=0 \rightsquigarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \rightsquigarrow \lambda = k^2\pi^2$$

Somit:

$$X_k(x) = a\cdot\sin k\pi x$$

löst (SL) mit (R). Zugehöriges T:

$$T_k(t) = a_k\cos k\pi t + b_k\sin k\pi t.$$

Ergebnis: die Funktionen

$$u_k(x,t) = \sin k\pi x\,(a_k\cos k\pi t + b_k\sin k\pi t)$$

lösen (S) mit Randbedingung (R)

Anpassung an die Anfangsbedingungen.
Wir setzen $f(x)$, $g(x)$ zu ungeraden Funktionen nach $[-1, 1]$ fort und nehmen sie als C^2 an. Dann hat man die gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung

$$f(x) = \sum a_k \sin k\pi x$$
$$g(x) = \sum b_k \sin k\pi x$$

Sei nun

$$u(x,t) = \sum \sin \pi k x \left(A_k \cos \pi k t + B_k \sin \pi k t \right)$$

$$\rightsquigarrow u(x,0) = \sum \sin \pi k x \cdot A_k = f(x)$$

$$u_t(x,t) = \sum \sin \pi k x \left(-\pi k A_k \sin \pi k t + \pi k B_k \cos \pi k t \right)$$

$$\rightsquigarrow u_t(x,0) = \sum \pi k B_k \sin \pi k x = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad A_k = a_k$$
$$B_k = b_k / \pi k$$

$\rightsquigarrow$

Theorem 4.2 Die eindeutig bestimmte Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

mit Anfangsbedingungen

$$f(x) = \sum a_k \sin \pi k x = u(x,0)$$
$$g(x) = \sum b_k \sin \pi k x = u_t(x,0)$$

und Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ ist

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi k x \left(a_k \cos \pi k t + \frac{b_k}{\pi k} \sin \pi k t \right).$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$

(4) Erläuterung. 1) Nimm $g(x) \equiv 0$ an. Also

$$u(x,t) = \sum_{1}^{\infty} \sin \pi k x \; a_k \cdot \cos \pi k t.$$

Für festes x schwingt also der Saitenpunkt mit der Grundfrequenz π, ersten Oberfrequenz 2π, usw, wobei die Amplituden der einzelnen Schwingungen durch die Fourierkoeffizienten von $f(x)$ (mal $\sin \pi k x$) gegeben werden. Für festes t

hat $u(x,t)$ hat $u(x,t)$ die Gestalt einer Reihe von Sinus, deren Amplituden durch die a_k schnell gegeben werden.

Unser Hörsinn nimmt das wahr!

2) Wir haben keine Dämpfung berücksichtigt.

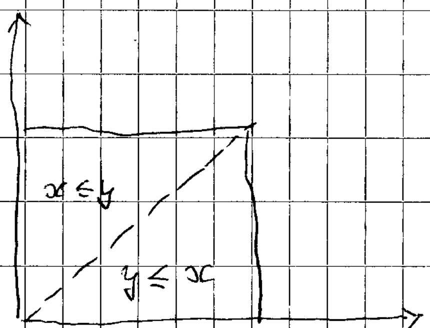
5 Zshang mit Integralgleichungen

Für $f \in \mathring{\mathcal{C}}^2[0,1]$ setze $Df = f''$, $\in \mathcal{C}^0$

$D : \mathring{\mathcal{C}}^2 \to \mathcal{C}^0$, linear. $\mathring{\mathcal{C}}^2$: $f(0)=f(1)=0$

Definiere auf $Q = \underset{x}{[0,1]} \times \underset{y}{[0,1]}$:

$$\mathcal{K}(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{für } x \le y \\ y(1-x) & \text{für } y \le x \end{cases}$$



stetig, $\mathcal{K}(x,y) = \mathcal{K}(y,x)$

$\mathcal{K} \equiv 0$ auf dem Rande von Q

Sei K der Integraloperator

$$Kf(y) = \int_0^1 f(x)\, \mathcal{K}(x,y)\, dx.$$

Zshang mit D !

DKf :

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 f(x)\,\mathcal{K}(x,y)\,dx$$

$$= \frac{d}{dy}\int_0^y f(x)\,x(1-y)\,dx + \frac{d}{dy}\int_y^1 f(x)\,y(1-x)\,dx$$

$$= f(y)y - \frac{d}{dy}\left[y\int_0^y x f(x)\,dx\right] + \frac{d}{dy}\left[y\int_y^1 f(x)\,dx\right]$$

$$- \frac{d}{dy}\left[y\int_y^1 x f(x)\,dx\right]$$

$$= f(y)y - \frac{d}{dy}\left[y\int_0^1 x f(x)\,dx\right] + \int_y^1 f(x)\,dx - y f(y)$$

$$= \int_y^1 f(x)\,dx + \text{const}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}Kf = -f(y), \text{ also } \quad DK = -I$$

Umgekehrt auch

$$KDf = Kf'' = \int_0^1 f''(x)\,\mathcal{K}(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^y f''(x)\,x(1-y)\,dx + \int_y^1 f''(x)\,y(1-x)\,dx$$

$$= f'(x)(1-y)x\Big|_0^y - \int_0^y f'(x)(1-y)\,dx$$

$$+ f'(x)(1-x)y\Big|_y^1 + y\int_y^1 f'(x)\,dx$$

$$= f'(y)\,y(1-y) - (1-y)f(y) - f'(y)\,y\Big|^{(1-y)} - y f(y)$$

$$= -f(y)$$

<u>Satz</u> 4.3. $DK = KD = -I$

<u>Theorem</u> 4.4 f löst (SL), (R):

$$\text{(SL)} \quad u'' + \lambda u = 0$$
$$\text{(R)} \quad u(0) = u(1) = 0$$

d.u.n.d. wenn f die Int Gleichung

$$\text{(F)} \quad u - \lambda K u = 0$$

löst.

<u>Beweis</u>. A) f löst SL, d.h.

$$f'' + \lambda f = 0$$

$\Rightarrow$

$$Df + \lambda I f = 0$$
$$KDf + \lambda K f = 0$$
$$-f + \lambda K f = 0$$

B)

$$f - \lambda K f = 0$$
$$Df - \lambda DKf = 0$$
$$f'' + \lambda f = 0$$

⑥ Eigenwerte

Wir sehen: für den Operator K gilt: λ ist ein singulärer Wert für ~~...~~ die Fredholmgleichung

$$I - \lambda K = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = k^2\pi^2, \quad k = 1, 2, \ldots$$

d.h. $\quad Kf = \frac{1}{\lambda} f \quad$ (für $f \not\equiv 0$.)

Def 4.1 $\quad T : E \to E$ linearer Operator.
$\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von T $\Leftrightarrow$ $\exists\, x \neq 0$ mit $Tx = \lambda x$. x ein Eigenvektor.

Offenbar bilden die x mit $Tx = \lambda x$ einen Unterraum von E: E_λ = Eigenraum zu λ. „abgeschlossen" $= \ker(\lambda I - T)$.

Def 4.2 $\quad \lambda$ Spektralwert von T $\Leftrightarrow$ $\lambda I - T$ ist nicht bijektiv.

EW $\Rightarrow$ Spektralwert.

E endlichdim $\Rightarrow$ T hat genau n EWe (mit Vielfachheit gezählt) = Nullstellen von $\chi_T(t) = \det(tX - T)$ „charakteristisches Polynom"

Die Abbildung

$$T: \ell_2 \to \ell_2$$

$$T(x_1, x_2, \dots) = T(0, x_1, x_2, \dots)$$

hat keine EWe

Bericht über EWe

Satz 4.5 Die EWe eines hermitischen Operators sind reell, die Eigenräume zu verschiedenen EWen sind $\perp$ zueinander

Beweis: 1) $x \in E_\lambda$.

$$\langle Tx, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

$$\shortparallel$$

$$\langle x, Tx \rangle = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

$\Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$

2) $x \in E_\lambda$, $y \in E_\mu$, $\lambda \neq \mu$

$$\langle Tx, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\shortparallel$$

$$\langle x, Ty \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

$\lambda \langle x, y \rangle = 0$.

Existenz?

Theorem 4.6. Es sei K ein kompakter hermitescher Operator. Dann hat K abzählbar viele EWe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die sich so zu einer Folge anordnen lassen:

$$\|K\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots$$

Die Folge häuft sich höchstens gegen 0. Eigenräume paarweise orthogonal. E wird von den E_λ und $E_0 = \text{Kern}\, K$ erzeugt. Alle Eigenräume $\neq E_0$ sind endlich-dimensional.

Also: $$E = E_0 \oplus \bigoplus_\lambda E_\lambda = E_0 \oplus E_0^\perp$$

$$\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$$

Folgerung: Wähle in E_0 und allen E_λ ONBen. Also:

Es gibt ONB von EVen von K

(Spektralsatz in der lin Algebra)

Numeriere durch (die Basisvektoren in $E_0^\perp$):

$$Kx = \sum \langle Kx, e_j \rangle e_j = \sum \langle x, Ke_j \rangle e_j$$
$$= \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

d.h. K rekonstruiert aus den λ_j $(\neq 0)$

(7) Zurück zur Geschichte (Euler etc.)

Wellengleichung (S) war im 18 Jhd aufgestellt, physikalisch korrekt (d'Alembert). Eindeutigkeitssatz wäre ohne weiteres durch Euler und Co. zu erledigen gewesen. Existenz von Lösungen:

Voraussetzungen viel: Räume von Funktionen, Konvergenz im Quadratmittel, Fourierentwicklung + Fragen der gleichmäßigen Konvergenz – das war mathematisch und psychologisch im 18 Jhd noch nicht möglich.

Klärung erst durch Dirichlet u Riemann ca 1850, nachdem Fourier seine Reihen systematisch eingeführt hatte.