Ich habe beim Formulieren der Aufgabe 6.1 angenommen, daß Sie die Lösungen zu den aufgezählten Standardeigenschaften der Differentialformen ausreichend leicht in der Literatur finden würden. Da nach Auskunft der Übungsleiter sowohl das Aufschreiben wie die Besprechung mehr Mühe gemacht hat, als ich erwartet hatte, schreibe ich etwas dazu.

6.1 (b) ist eine unmittelbare Folge der Kettenregel und war kein Problem.

6.1 (a) Basisdarstellung. Wegen der Linearität genügt es, einen Summanden zu betrachten. Wir formen mit der Kettenregel um:

$$\begin{aligned}
&\omega_{i_1\ldots i_k}(f(p))dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(Tf|_p v_1, \ldots, Tf|_p v_k) = \\
&\omega_{i_1\ldots i_k}(f(p))(dx^{i_1} \circ Tf|_p) \wedge \ldots \wedge (dx^{i_k} \circ Tf|_p)(v_1, \ldots, v_k) = \\
&\omega_{i_1\ldots i_k}(f(p))(df^{i_1} \wedge \ldots \wedge (df^{i_k})(v_1, \ldots, v_k)\ .
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung benutzt, daß die Koordinatenfunktionen x^j im Bild von f gerade die Komponentenfunktionen von f liefern: $f^j = x^j \circ f$. Es stört die weitere Rechnung nicht, daß die Differentiale der Komponentenfunktionen nicht unabhängig sein müssen. Man kann aber auch noch einsetzen $df^j = \sum_k (\frac{\partial}{\partial y^k} f^j) dy^k$. Das werde ich am Ende tun.

Alle übrigen Teile der Aufgabe beruhen darauf, daß mit dem Satz von Schwarz, also mit der Symmetrie der zweiten Ableitungen, alle störenden Terme beseitigt werden.

Leider muß man etwas auf die Normierungen aufpassen. Eine beliebige Bilinearform b kann in ihren symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil zerlegt werden:

$$b(v, w) = (b(v, w) + b(w, v))/2 \ + \ (b(v, w) - b(w, v))/2.$$

Aber, wenn die Bilinearform als Produkt von zwei Linearformen gegeben ist, $b(v, w) := \ell_1(v)\ell_2(w)$, dann ist der schiefsymmetrische Teil von b nur die **Hälfte** des Dachproduktes $(\ell_1 \wedge \ell_2)(v, w) := \ell_1(v)\ell_2(w) - \ell_1(w)\ell_2(v)$. Das führt schließlich dazu, daß in der Formel für das Dachprodukt einer r-Form und einer s-Form (vgl. Aufg. 4.4 oder Königsberger 13.1) der Normierungsfaktor $1/(r!s!)$ auftritt.
In ähnlicher Weise muß man bei der äußeren Ableitung auf die Normierung aufpassen, weil der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung schließlich so lauten soll:

$$\int_{Rand\ von\ G} \omega \ = \ \int_G d\omega\ .$$

Das hat zur Folge, daß die äußere Ableitung der Differentialform $\omega|_p := h(p) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$, die die Richtungsableitung $\omega|_{p+v} - \omega|_p \approx T_v\omega|_p = dh|_p(v) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ hat, durch eine wie beim Dachprodukt normierte Schiefsymmetrisierung aus der gewöhnlichen Ableitung entsteht:

$$d\omega|_p = dh|_p \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$$

$$d\omega|_p(v_0, \ldots, v_k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j dh|_p(v_j) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k(v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_k).$$

Bei den Kurvenintegralen von 1-Formen haben wir diese richtige Normierung schon kennen gelernt.

Zurück zu den Aufgaben. In 6.1 (a) und (c) wird fast dasselbe behauptet, in (a) soll es unter Verwendung der Basisdarstellung nachgerechnet werden, in (c) ohne diese. In der Literatur finden Sie meistens die erste Rechnung, ich ziehe die zweite vor. Der Beweis beruht auf der

Symmetrie der zweiten Ableitung der Abbildung f, mit der Sie zurückziehen. In (d) wird die Symmetrie der zweiten Ableitung der Koeffizientenfunktion h benutzt. Weil in (a) die Komponentenfunktionen von f auftreten, kann man (d) in (a) verwenden.

Zunächst (d). Die äußere Ableitung $d\omega|_p = dh|_p \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ ist eine Summe von Termen $\frac{\partial}{\partial x^j} h|_p dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$. Von jedem wird die äußere Ableitung berechnet, dann wird summiert. Beachte: $(a_{i,j} - a_{j,i}) dx^i \wedge dx^j$ ist 0, falls $a_{i,j}$ symmetrisch ist, also:

$$d(d\omega) = \sum_j \left(\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} h|_p dx^i \wedge dx^j \right) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \right) = 0.$$

Nun (c). Die Richtungsableitung von $(f^*\omega)|_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega|_{f(p)}(Tf|_p v_1, \ldots, Tf|_p v_k)$ ist

$$\begin{aligned} T_{v_0}(f^*\omega)|_p(v_1, \ldots, v_k) = & T_{Tf_p v_0}\omega|_{f(p)}(Tf|_p v_1, \ldots, Tf|_p v_k) + \\ & \sum_{j=1}^{n} \omega|_{f(p)}(Tf|_p v_1, \ldots, T^2 f|_p(v_0, v_j), \ldots, Tf|_p v_k). \end{aligned}$$

Als nächstes ist diese Richtungsableitung zu schiefsymmetrisieren:

$$d(f^*\omega)|_p(v_0, \ldots, v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, T_{v_i}(f^*\omega)|_p(v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_k).$$

Das gibt erstens wie gewünscht $d\omega|_{f(p)}(Tf|_p v_0, \ldots, Tf|_p v_k) = f^*(d\omega)(v_0, \ldots, v_k)$ und zusätzlich alle Terme, die $T^2 f$ enthalten. Hier kommt nun jeder Term $T^2 f(v_j, v_h)$ genau zweimal vor, erstens in der Zeile mit $i = j$ und zweitens, wenn $i = h$. Die Vorzeichen der Zeilen sind $(-1)^j, (-1)^h$. Außerdem ist $T^2 f(v_j, v_h)$ das Argument mit der Nummer $j+1$ in ω, falls $j < h$ ist, und $T^2 f(v_j, v_h)$ ist das Argument mit der Nummer j in ω, falls $j > h$ ist. Alle übrigen Argumente von ω stimmen einschließlich der Reihenfolge überein. Deshalb treten die beiden Terme $T^2 f(v_j, v_h)$, $T^2 f(v_h, v_j)$ mit verschiedenem Vorzeichen auf, summieren sich also zu 0. Das beweist (c).

Schließlich der zweite Teil von (a). Zunächst berechnen Sie die Richtungsableitung von $\omega_{i_1 \ldots i_k}(f(p))(df^{i_1} \wedge \ldots \wedge (df^{i_k})(v_1, \ldots, v_k)$ nach der Produktregel. Das gibt einen Term mit der Richtungsableitung von ω; diese Terme summieren sich wieder zu $f^* d\omega$, hier also zu 0. Alle übrigen Terme enthalten zweite Ableitungen der Komponentenfunktionen von f. Wir setzen die Basisdarstellung $df^j = \sum_k (\frac{\partial}{\partial y^k} f^j) dy^k, j = i_1, \ldots, i_k$ nur in dem Faktor ein, den wir gerade differenzieren. Das ergibt dann Terme $\sum_i \sum_k (\frac{\partial}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^k} f^j) dy^i \wedge dy^k$, die mit weiteren Faktoren $df^{i_{\cdot\cdot}}$ in einem Dachprodukt stehen. Schon die Summe über die expandierten Terme gibt 0, wie oben, weil die zweiten Ableitungen von f^j symmetrisch sind.
Alternativ kann man auch (d) in (a) verwenden, wenn man sich überlegt, daß die äußere Ableitung $d(df^1 \wedge \ldots \wedge df^k) = 0$ ist. Wieder wird die Richtungsableitung mit der Produktregel berechnet; dann werden die Summanden einzeln schiefsymmetrisiert. Dann kann man sich wie beim Beweis von (d) auf den Faktor mit der zweiten Ableitung konzentrieren und das Resultat ist 0, weil für Funktionen h gilt $d(dh) = 0$. – Diese Argumentation wird schließlich dadurch vervollkommnet werden, daß für die äußere Ableitung eine Produktregel mit Vorzeichen bewiesen wird.