# Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Wir beginnen das 3. Semester mit Wiederholungen.

## Aufgabe 1.1 Parallele Unterräume

Sei $l : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ eine lineare Abbildung von Rang $e$. Betrachten Sie zu jedem $b \in \mathbb{R}^e$ das Urbild $l^{-1}(b) \subset \mathbb{R}^d$. Beschreibe Sie diese Urbilder, also, was für Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ sind es, wie liegen sie zueinander, welche algebraische Struktur haben sie?

Geben Sie explizit eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ mit $e > 1$ und $0 \neq \mathrm{Rang}(l) < e$ an. Was können Sie in diesem Fall über die Urbilder sagen?

## Aufgabe 1.2 Differenzieren unter dem Integral

Sei $c : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve mit $c(a) = c(b)$. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der nicht auf der Kurve liegt, genauer nicht im Bild der Funktion $c$. Wir definieren eine neue Funktion durch das Kurvenintegral der Differentialform $\frac{f(z)}{z-w}dz$, also:

$$g(w) := \int_c \frac{f(z)}{z-w}dz := \int_a^b \frac{f(c(t))}{c(t)-w}c'(t)dt$$

Zeigen Sie, daß $g$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$g'(w) = \int_c \frac{f(z)}{(z-w)^2}dz.$$

(Beide Standardargumente, die Sie kennen sollten, funktionieren in dieser Situation.)

## Aufgabe 1.3 Gliedweises Integrieren

Mit den Definitionen aus Aufgabe 1.2 sei $w_0 \in \mathbb{C} - c[a, b]$. Es gibt also ein $r > 0$, so daß für alle $t \in [a, b]$ gilt:$|c(t) - w_0| > r$. Das bedeutet, daß die Scheibe $\{w | \, |w - w_0| \leq r\}$ ebenfalls nicht das Bild von $c$ trifft. Benutzen Sie die Gleichung

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w_0}\frac{1}{1-\frac{w-w_0}{z-w_0}},$$

um den Integranden des Kurvenintegrals $\int_c \frac{f(z)dz}{z-w}$ für $|w - w_0| \leq qr$ in einer geometrischen Reihe zu entwickeln.

Begründen Sie, warum Sie diese Reihe gliedweise integrieren dürfen. Bestimmen Sie die Ableitungen $g^{(k)}(w_0)$ aus den Koeffizienten dieser Reihe und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Formel für $g'(w)$ aus Aufgabe 1.2.

## Aufgabe 1.4 Zweite Ableitungen und Kettenregel

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \sin(x + 2y).$$

(a) Seien $g$ die Gerade durch die Punkte $(2, 5)$ und $(6, 5)$ und $k$ der Kreis durch diese beiden Punkte und den Punkt $(4, 6)$. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Kurven an, und berechnen Sie die zweite Ableitung von $f \circ g$ und $f \circ k$ in den Punkten $(2, 5)$ und $(6, 5)$ mit Hilfe der Kettenregel.

(b) Geben Sie ein konvexes Gebiet an, auf dem $f$ konvex ist. Dabei muß dieses Gebiet nicht in irgendeiner Weise maximal sein. (Welches sind die einfachsten konvexen Mengen, die Sie kennen?)