Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 12.1 Parameterabhängige Integrale

Die Schwingungsdauer des ebenen Fadenpendels wächst mit der Amplitude. Wir wollen durch Differenzieren unter dem Integral abschätzen, wie stark die Amplitude wächst. Um keine Physikkenntnisse vorauszusetzen, betrachten wir das Fadenpendel als durch seine Differentialgleichung definiert:

$$\ddot{\varphi}(t) + \sin\varphi(t) = 0.$$

(a) Verifizieren Sie den Energiesatz: $\frac{1}{2}\dot{\varphi}(t)^2 - \cos\varphi(t) = const.$

Da mit $t \mapsto \varphi(t)$ auch $t \mapsto \varphi(t+t_0)$ Lösung der Differentialgleichung ist, können wir $\varphi(0) = 0$ annehmen. Wir nennen dann $m := \dot{\varphi}(0)$ *Anfangsgeschwindigkeit* und a_m mit $1 - m^2/2 = \cos a_m$ *Maximalamplitude* zu m. Die Funktion $a \mapsto T(a)$ heißt $\frac{1}{4}$-Periode, falls $\dot{\varphi} > 0$ im Intervall $[0, T(a_m))$ gilt und $\varphi(T(a_m)) = a_m$ (oder $\dot{\varphi}(T(a_m)) = 0$).
(b) Zeigen Sie (im zweiten Fall bei festem a):

$$T(a) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos a)}}, \qquad T(\lambda a) = \int_0^a \frac{\lambda dx}{\sqrt{2(\cos\lambda x - \cos\lambda a)}}.$$

(c) Zeigen Sie (Potenzreihen ansehen, geeignete Sätze vollständig zitieren):
$\lambda \mapsto T(\lambda a)$ ist stetig bis $\lambda = 0$, $\lim_{\lambda\to 0} T(\lambda a) = \pi/2$ und $\frac{\partial}{\partial\lambda} T(\lambda\, a)|_{\lambda=0} = 0$.
(d) Ferner: $\lambda \to T(\sqrt{\lambda}\, a)$ ist differenzierbar bei 0 mit $\frac{\partial}{\partial\lambda} T(\sqrt{\lambda}\, a)|_{\lambda=0} > 0$; offenbar können wir mit dieser Ableitung gut beurteilen, wie die Periode von der Amplitude abhängt.

Aufgabe 12.2 Periheldrehung durch Linearisieren

Eigentlich (also nicht wie in 12.1) hat ein Fadenpendel einen zweidimensionalen Konfigurationsraum: Der Massenpunkt kann sich auf der Sphäre um den Aufhängepunkt bewegen. Wir setzen die Pendellänge und die Erdbeschleunigung gleich 1. Wähle den Aufhängepunkt als $0 \in \mathbb{R}^3$. Und wir vermeiden wieder physikalische Vorkenntnisse, indem wir durch die **Newtonschen Bewegungsgleichungen** definieren, was wir untersuchen wollen:

$$e := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \mapsto x(t) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad m\cdot(-e + \langle x(t), e\rangle x(t)) = m\cdot(\ddot{x} - \langle x, \ddot{x}\rangle x)(t),$$

in Worten:
<u>Tangentialkomponente der Gewichtskraft = Tangentialkomponente der Beschleunigung</u>
("tangential" an die Einheitssphäre).
Solche sphärischen Bewegungen werden meist in Polarkoordinaten beschrieben. Außerdem sind folgende Funktionen physikalisch wichtig:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta(t)\cos\varphi(t) \\ \sin\vartheta(t)\sin\varphi(t) \\ -\cos\vartheta(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \text{Kinetische Energie} & T := \frac{1}{2}\langle\dot{x},\dot{x}\rangle = \frac{1}{2}(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) \\ \text{Potentielle Energie} & V := \langle x, e\rangle = -\cos\vartheta \\ \text{Vertik. Drehimpuls} & D := \langle x\times\dot{x}, e\rangle = \sin^2\vartheta\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

(a) Verifizieren Sie Energie- und Drehimpulssatz: $\frac{d}{dt}(T+V)=0,\ \frac{d}{dt}D=0.$
(b) Verifizieren Sie die folgenden speziellen Lösungen ("Breitenkreise"):

$$\vartheta(t)=\Theta,\ \varphi(t)=\omega t, \quad \text{mit}: \omega^2 = 1/\cos\Theta.$$

Nun soll längs dieser speziellen Lösungen linearisiert werden, d.h. wir betrachten eine differenzierbare Schar von Lösungen $x(t,\alpha)$, die für $\alpha=0$ eine dieser Breitenkreislösungen sind.
(c) Folgern Sie für $v(t) := \frac{d}{d\alpha}x(t,\alpha)|_{\alpha=0}$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungen dieser linearen Dgl beschreiben, wie die zu den Breitenkreislösungen benachbarten Lösungen aussehen.
Hilfe: Machen Sie den Ansatz (Linearkombination von orthogonalen Einheitsvektoren tangential an die Einheitssphäre!)

$$v(t) = a(t)\cdot\begin{pmatrix}\cos\Theta\cos\omega t\\ \cos\Theta\sin\omega t\\ \sin\Theta\end{pmatrix} + b(t)\cdot\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

Sie erhalten z.B., falls die Lösungen $x(t,\alpha)$ von α unabhängige Gesamtenergie $T+V$ haben für die zu dem Breitenkreis senkrechte Komponente die Differentialgleichung

$$\ddot{a}(t) + \mu^2(\Theta)\cdot a(t) = 0 \text{ mit } \mu(\Theta)\neq\omega.$$

Die radialen Maxima der Nachbarlösungen verschieben sich also bei einem Umlauf; dies nennt man "Periheldrehung". (Warum ist die Lösung $a(t)=0, b(t)=const$ uninteressant?)

Aufgabe 12.3 Nochmal Untermannigfaltigkeiten

Kern und Bild linearer Abbildungen sind Vektorunterräume. Wir haben Verallgemeinerungen auf nichtlineare Abbildungen f kennen gelernt: Urbilder und Bilder von f sind, wenigstens **lokal** und unter Höchstrangvoraussetzungen an Tf, Stücke von Untermannigfaltigkeiten.
Für linearer Abbildungen gilt sogar: Die Urbilder von Unterräumen sind Unterräume. Die nichtlineare Version lautet:
Sei U^d eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n,\ n>d$, sei $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, sei $f(p)\in U$ und *sei f transversal zu U in $f(p)$*. Damit ist gemeint: $\mathbb{R}^n$ wird von den beiden Unterräumen Bild$(Tf|_p)$ und Tangentialraum von U in p (geschrieben T_pU) erzeugt. Dann ist $f^{-1}U$ **lokal**, also nahe p, eine Untermannigfaltigkeit.
Schreiben Sie einen Beweis auf, der diesen Satz unter geschickter Benutzung der Definition von Untermannigfaltigkeit (Königsberger 3.5 I) aus dem Satz über Urbilder folgert.

Aufgabe 12.4 Zum Satz von Stokes (Königsberger 13.10, Aufg. 3+16)

(a) Berechnen Sie die äußere Ableitung $d\omega$ der auf $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ definierten 2-Form:

$$\omega = r^{-3}(xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy).$$

(b) Es sei $\mathbb{S}^2_r$ die 2-Sphäre mit Mittelpunkt 0 und Radius r.
Folgern Sie aus (a), daß $\int_{\mathbb{S}^2_r}\omega$ von r unabhängig ist.
(c) Verifizieren Sie $\int_{\mathbb{S}^2_1}\omega = 4\pi$.
(Eine Parametrisierung der 2-Sphäre finden Sie z.B. in Aufg. 12.2)
(d) Angenommen, es gäbe in einer (z.B. einfach zusammenhängenden) Umgebung von $\mathbb{S}^2_1$ eine 1-Form β mit $d\beta=\omega$ auf $\mathbb{S}^2_1$. Zerlegen Sie die Sphäre in zwei Halbsphären und folgern Sie aus dem Satz von Stokes $\int_{\mathbb{S}^2_1}\omega = 0$ – im Widerspruch zu (c).
Bemerkung. In sternförmigen Teilmengen von $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ gibt es β mit $d\beta=\omega$ (Poincaré).