Analysis III

Dozent: Hermann Karcher Assistent: Georg Biedermann

Aufgabe 9.1 Kugelvolumina

Kugelvolumina werden im Königsberger mehrfach berechnet. Der Induktionsbeweis wird einfacher, wenn man die Dimension um 2 erhöht.
Definitionen: Kugeln in $\mathbb{R}^n$: $B_r := \{z \in \mathbb{R}^n;\ |z| \le r\}$, $\quad \alpha_n := \mathrm{vol}(B_1)$.
Schreiben Sie für $s = 1, 2, 4$ $z \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ als $z = (x, y),\ x \in \mathbb{R}^s, y \in \mathbb{R}^{n-s}$.
Zeigen Sie mit Fubini:

$$\alpha_n \overset{(s=1)}{=} \alpha_{n-1} \cdot \int_0^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt, \quad \alpha_n \overset{(s=2)}{=} \alpha_{n-2} \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad \alpha_n \overset{(s=4)}{=} \alpha_{n-4} \cdot \frac{4\pi^2}{n(n-2)}.$$

Offenbar ist der Fall $s = 2$ deutlich einfacher als $s = 1$. Bearbeiten Sie $s = 4$ mit Fubini und nicht als direkte Folge von $s = 2$.

Aufgabe 9.2 Transformationssatz und Schichtvolumen

Wir definieren die parametrisierte “Wendelfläche” durch:

$$W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \ W(s,t) := \begin{pmatrix} s \cdot \cos t \\ s \cdot \sin t \\ h \cdot t \end{pmatrix}, \quad (h > 0 \text{ fest}),$$

und ein parametrisiertes Einheitsnormalenfeld N durch:

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad N := \left(\frac{\partial}{\partial s} W \times \frac{\partial}{\partial t} W\right) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial s} W \times \frac{\partial}{\partial t} W\right|^{-1}.$$

Danach parametrisieren wir eine “Schicht” über der Wendelfläche durch:

$$F : [0, \epsilon_0] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ \ F(\epsilon, s, t) := W(s,t) + \epsilon \cdot N(s,t).$$

(a) Berechnen Sie TW und TF, d.h. hier, berechnen Sie deren Matrizen, denn die zu verwendenden Basen sind ja klar. Berechne $\det(TF)$.

(b) Warum ist F lokal invertierbar (für ϵ nahe 0)?

(c) Verifizieren Sie: $\det((TW)^{tr} \cdot TW)^{1/2}_{(s,t)} = \left|\frac{\partial}{\partial s} W \times \frac{\partial}{\partial t} W\right|_{s,t}$
$= \textit{Fläche des Bildes des Einheitsquadrates unter } TW|_{s,t}$.

(d) Schreiben Sie für ein kompaktes $D \subset\subset \mathbb{R}^2$ mit der Substitutionsregel das Volumen des Bildes $F([0, \epsilon_0] \times D)$ auf und bestimmen Sie den Integranden in

$$\lim_{\epsilon_0 \to 0} \frac{1}{\epsilon_0} \mathrm{vol}(F([0, \epsilon_0] \times D)) = \int_D [??].$$

Der Grenzwert links ist eine gute Definition des Flächeninhalts $W(D)$, das Integral rechts wird zu dessen Berechnung benutzt (von manchen Autoren auch zur Definition).

Aufgabe 9.3 Zusammenfassung zu Differentialgleichungen I

Das folgende sollten Sie beinahe schon wissen. Stellen Sie Fragen, falls ernste Probleme auftauchen.

Es sei $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein zunächst stetiges (später stetig differenzierbares) Vektorfeld, für das folgende Lipschitz-Bedingung vorausgesetzt werde: $|X(t,y) - X(t,\tilde{y})| \le L|y - \tilde{y}|$.

(a) Wiederholen Sie: Die Differentialgleichung $\dot{f}(t) = X(t, f(t)),\ f(0) = p_0$ besitzt eine auf $[0,\infty)$ definierte Lösung, weil die Lindelöf-Abbildung

$$\mathcal{L} : C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \to C^1([0,T],\mathbb{R}^n),\ f \mapsto \mathcal{L}f \quad \text{mit } \mathcal{L}f(t) := p_0 + \int_0^t X(\tau, f(\tau))d\tau$$

bezüglich der Norm $\|\!|f|\!\| := \max_{t\in[0,T]} |f(t)|e^{-Lt}$ für jedes T kontrahierend ist. Ähnlich kann die Lösung auch für negative t definiert werden.

(b) Wir schreiben die Lösung f aus (a) mit $f(0) = p$ als $F(t,p)$ oder als $F_t(p)$, also

$$\tfrac{\partial}{\partial t}F(t,p) = X(t, F(t,p)),\ F(0,p) = p.$$

Die Abbildung $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Fluß des Vektorfeldes* X.
Wiederholen Sie die Abschätzung $|F(t,p) - F(t,q)| \le |F(0,p) - F(0,q)|e^{+Lt}$ und folgern Sie, daß die Flußabbildung $F_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für jedes t Lipschitz-stetig ist.

(c) Zeigen Sie $F_t \circ F_\tau = F_{t+\tau}$ oder $F(t, F(\tau,p)) = F(t+\tau, p)$.
Bemerkung: Für $X(t,p) := A\cdot p,\ F(t,p) = \exp(tA)\cdot p$ finden Sie eine Eigenschaft der Exponentialreihe wieder. (Und der Dauertip: Kettenregel!)

(d) Setzen Sie voraus, daß $F(t,p)$ in beiden Variablen stetig differenzierbar ist. Folgern Sie unter Angabe benutzter Sätze für die Ableitung nach p, Bezeichnung $T_2F|_{(t,p)}$, die *lineare* Differentialgleichung

$$(L) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(T_2F|_{(t,p)}) = T_2X|_{(t,F(t,p))} \circ T_2F|_{(t,p)}, \qquad T_2F|_{(0,p)} = \mathrm{id}.$$

Nächster Schritt: Ohne die Differenzierbarkeit von F nach p vorauszusetzen, kann man folgern (nicht jetzt), daß die Lösung von (L) tatsächlich Ableitung von F ist.

(e) Ähnlich wie in (d) folgern Sie aus der Annahme, f_α sei eine stetig differenzierbare Schar von Lösungen der Differentialgleichung $\dot{f}_\alpha(t) = X(t, f_\alpha(t)),\ f_\alpha(0) = p_\alpha$, daß $\varphi(t) := \frac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(t)|_{\alpha=0}$ eine *lineare* Differentialgleichung erfüllt.
Beabsichtigte Anwendung (in Mathematik und Physik): Wenn $f_0(t)$ und $\varphi(t)$ bekannt sind, kann man approximieren $f_\alpha(t) \approx f_0(t) + \alpha\cdot\varphi(t)$.
Beispiel, die Differentialgleichung des Mathematischen Pendels:

$$f_\alpha''(t) + \sin(f_\alpha(t)) = 0,\ f_\alpha(0) = 0,\ f_\alpha'(0) = \alpha,\ f_0(t) = 0.$$

Bestimmen Sie die "Linearisierung" $\varphi(t)$ des Mathematischen Pendels.

(f) Um den Linearisierungsfehler in (e) abschätzen zu können, muß man aus Differentialungleichungen $|h'(t)| \le L|h(t)| + Ct^k,\ h(0) = 0,\ k = 1,2,3$ eine Schranke für $|h(t)|$ gewinnen. Erinnern Sie sich? – Dieses Resultat ist auch geeignet, um den Fehler numerisch bestimmter Approximationen abzuschätzen.