Übungen Differentialgeometrie I

Blatt 14 **Prof. Karcher/Dr. Große-Brauckmann** **31. Januar 2001**

Letztes Aufgabenblatt des WS, nicht alle Voraussetzungen am 31.1. vorhanden.

Aufgabe 47 – Dreifach orthogonale Flächenscharen vgl. Rückseite

Auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ seien drei Flächenscharen gegeben, die sich paarweise senkrecht schneiden. Es sei N_i das Normalenfeld an die i-te Flächenschar, $i = 1, 2, 3$.

a) An die Schnittkurve zweier Flächen aus verschiedenen Scharen ist das Normalenfeld der dritten Schar tangential.

b) Zeigen Sie mit der Symmetrie der Weingartenabbildung $\langle D_{N_i} N_j,\, N_k\rangle = 0$ für $i \neq j, k$.

c) Beweisen Sie nun Dupins Satz: Zwei Flächen einer dreifach orthogonalen Flächenschar schneiden sich in Krümmungslinien.

d) *Beispiele*: Die Röhren um eine Raumkurve c (Aufg. 16, 34) und die Normalebenen von c schneiden sich in Krümmungslinien (Aufg. 37). Die von im Normalenbündel *parallelen* Vektorfeldern längs c erzeugten Flächen (Aufg. 40) schneiden die beiden anderen orthogonal, also in Krümmungslinien. (Man kann sogar jedes orthogonale Netz in einer Normalebene normal-parallel verschieben.)

Aufgabe 48 – Eine Konsequenz der Codazzi-Gleichungen

Wir betrachten eine Fläche mit zwei unterschiedlichen Hauptkrümmungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

a) Zeigen Sie durch kovariantes Differenzieren von $Se_i = \lambda_i e_i$ (für $i = 1, 2$) und unter Benutzung der Codazzi-Gleichungen, daß die geodätische Krümmung der Krümmungslinien zur Hauptkrümmung λ_2 erfüllt $\kappa_{g,2} = D\lambda_2(e_1)/(\lambda_1 - \lambda_2)$. Geben Sie auch die entsprechende Formel für die geodätische Krümmung $\kappa_{g,1}$ der anderen Schar von Krümmungslinien an. Welchen Ausdruck erhalten Sie für die Lieklammer $[e_1, e_2]$?

Wir setzen von nun an $\mathrm{Rang}(S) = 1$ voraus, also z.B. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

b) Warum sind die entsprechenden Krümmungslinien Geraden und die Krümmungslinien zu λ_2 Parallelkurven?

c) In der Vorlesung wurde (evtl. später) für Parallelkurven die *Ricatti-Gleichung* $\kappa_g' = -\kappa_g^2 - \det S$ gezeigt. Folgern Sie, daß (wie bei jedem Kegel) $1/\lambda_2$ linear ist.

Aufgabe 49 – Eine Symmetrie des Krümmungstensors R

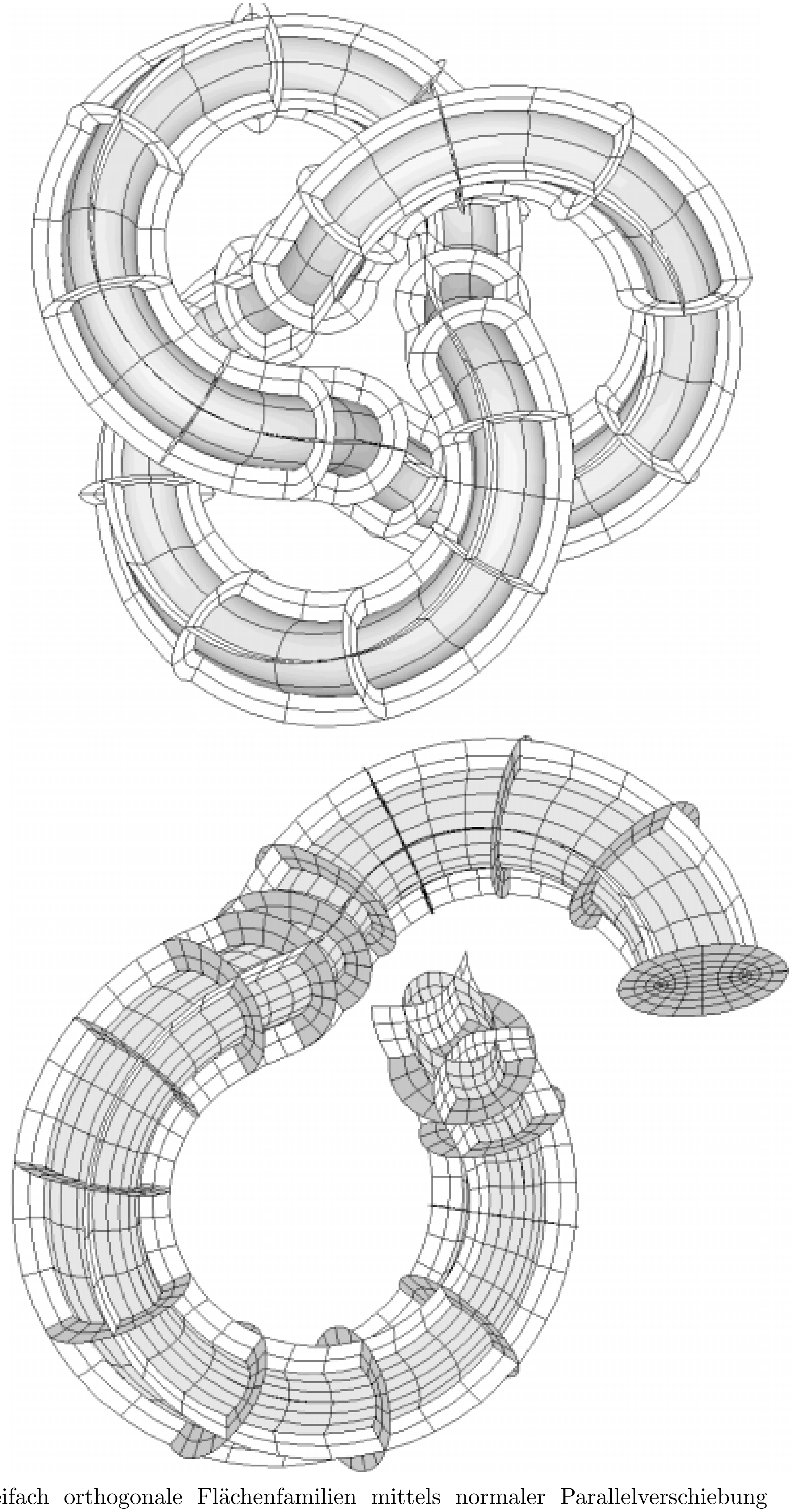
Benutzen Sie **nur**, daß der R in seinen drei Argumenten $X, Y, Z \mapsto R(X,Y)Z$ linear ist und daß die Identitäten (*i*) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$, (*ii*) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ und (*iii*) $g(R(X,Y)U,V) = -g(R(X,Y)V,U)$ gelten, um $g(R(X,Y)U,V) = g(R(U,V)X,Y)$ zu zeigen.

Aufgabe 50 – Vergleich von Jacobifeldern auf Flächen (Definition bis 7.2.)

Es seien zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische c_1, c_2 auf Flächen gegeben. Wir betrachten normale Jacobifelder $J_1 = a\,\mathrm{Rot}(90°)\,\dot c_1$ und $J_2 = b\,\mathrm{Rot}(90°)\,\dot c_2$ längs dieser Geodätischen, und nehmen für die jeweiligen Gauß-Krümmungen $K(t) \geq L(t)$ an.

a) Zeigen Sie den Vergleichssatz: Ist $a(0) = b(0)$, $a'(0) = b'(0)$ und $a > 0$ auf $(0, T)$, so folgt $a(t) \leq b(t)$ auf $[0, T]$. Dazu betrachten Sie logarithmische Ableitungen von a und b, nachdem Sie $a'b - ab'$ unter Benutzung der Jacobifeldgleichung differenziert haben.

b) Eine Lösung, die nicht identisch verschwindet, hat höchstens einfache Nullstellen (das heißt die Ableitung ist von 0 verschieden in jeder Nullstelle).



Zwei dreifach orthogonale Flächenfamilien mittels normaler Parallelverschiebung (eines in einer Normalebene orthogonalen Netzes) längs einer Raumkurve (Aufg. 47).