Differentialgeometrie I

Das Buch *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen* von M. do Carmo (Vieweg) gilt als die einfachste Einführung in die Differentialgeometrie. Ich finde, daß zu den Definitionen zu wenig gesagt wird; Definitionen fallen nicht vom Himmel.
Auf meiner homepage: www.math.uni-bonn.de/people/karcher finden sie zu der im WS 00/01 gehaltenen Differentialgeometrie I ein *Skript* (49 Seiten + Übungsblätter). Im WS 01/02 habe ich Geometrie für Lehramt gelesen; dazu finden Sie meine protokollartige Mitschrift im Internet (50 Seiten incl. Übungen). Diese Vorlesung enthält insbesondere, welche Kenntnisse an Euklidischer Geometrie ich mir bei Lehrern wünsche.

Aufgabe 1.1 (Mit konstanter Geschwindigkeit parametrisierte Kreise)
Geben Sie einen parametrisierten Kreis $c(t) \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $r > 0$ an, der mit konstanter Geschwindigkeit $|v| = |\dot{c}(t)|$ durchlaufen wird.
Wie groß ist seine Beschleunigung $|a| = |\ddot{c}(t)|$?
Es seien $v \perp a \in \mathbb{R}^3$ zwei orthogonale Vektoren mit $v, a \neq 0$. Geben Sie einen Kreis $c(t)$ an mit $\dot{c}(0) = v$, $\ddot{c}(0) = a$, $|\dot{c}(t)| = |v|$.
Geben Sie einen parametrisierten Kreis an, dessen Geschwindigkeit linear mit der Zeit wächst, $|\dot{c}(t)| = const \cdot t$.

Aufgabe 1.2 (Drehungen und Spiegelungen)
Es sei $N \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Definiere eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$L(x) := -x + 2\langle x, N\rangle \cdot N.$$

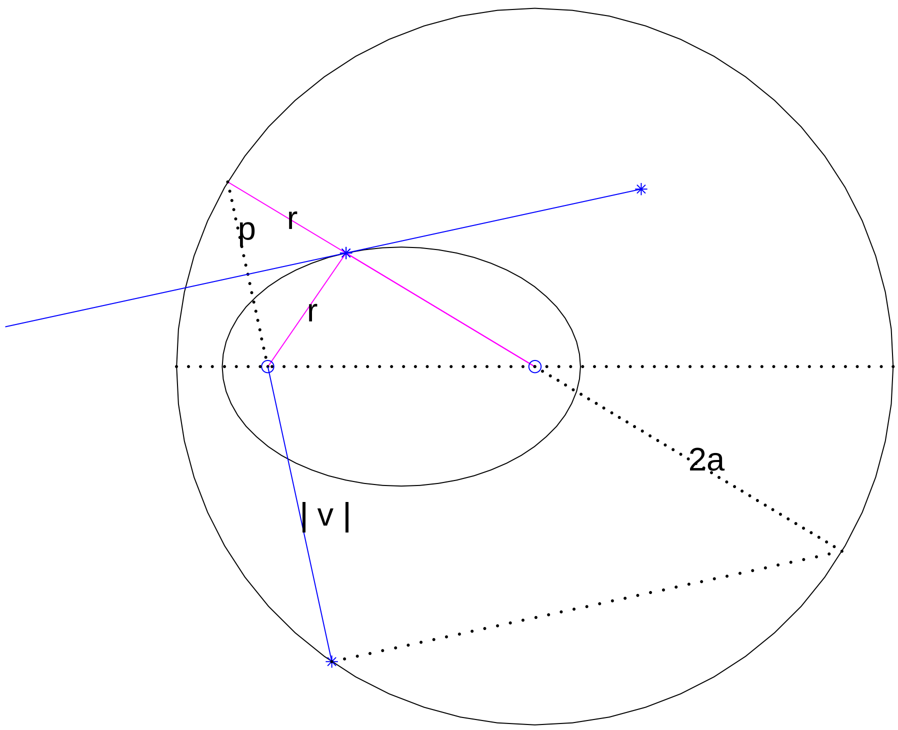
Warum ist diese Abbildung orthogonal (oder "isometrisch")? Warum kann sie keine anderen Eigenwerte als ± 1 haben? Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume. Warum nennt man L eine $180°$-Drehung und $-L$ eine Spiegelung?
Bestimmen Sie die Matrix von L für die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ $(N = (N^1, N^2, N^3)$).

Aufgabe 1.3 (Rollkurven oder Zykloiden)
Wir bewegen den Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $r > 0$ mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zur x-Achse. Außerdem rotieren wir den Kreis mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rechts herum. Die Bahnkurven der Kreispunkte sind nun gegeben durch

$$c_\alpha(t) = (v \cdot t, 0) + r \cdot (\cos(\omega t + \alpha),\ -\sin(\omega t + \alpha)).$$

Bestimmen Sie r (zu festen v, ω) so, daß alle Kurven c_α in ihren tiefsten Punkten, also auf der Geraden $y = -r$, die Geschwindigkeit 0 haben. Wir sagen: Der Kreis rollt auf der Geraden ab. Verifizieren Sie, daß der Mittelpunkt bei einer Umdrehung gerade um $2\pi r$ voran kommt. (do Carmo, Bild 1.7)
Berechnen Sie das Bogenlängenintegral mit einer Stammfunktion.

Aufgabe 1.4 (Ellipsen)
Die Kurve $c(t) := (a\cos t, b\sin t)$, für $a > b > 0$ und $0 \leq t \leq 2\pi$, heißt *Ellipse*, die beiden Punkte $F_\pm = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ heißen ihre *Brennpunkte*. Geben Sie eine möglichst einfache lineare Abbildung an, die diese Ellipse auf einen Kreis abbildet.
Zeigen Sie, daß die Summe der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist, und zwar $|c(t) - F_+| + |c(t) - F_-| = 2a$. Hierauf beruht die sogenannte Gärtnerkonstruktion, die eine Ellipse durch einen straffen (in $c(t)$ geknickten) Faden mit Endpunkten $F_\pm$ erzeugt.
Rechnen Sie nach, daß die Winkel zwischen der Kurventangente und den beiden *Brennstrahlen* gleich sind, $winkel(c(t) - F_+,\ -\dot{c}(t)) = winkel(c(t) - F_-,\ \dot{c}(t))$. Daher werden von F_+ ausgehende Lichtstrahlen an der Ellipse nach F_- reflektiert. (Dies wird in Flüstergewölben ausgenutzt.)
Spiegelt man F_- an allen Tangenten, so erhält man einen Kreis vom Radius $2a$ um F_+, den *Leitkreis*. Jeder Punkt der Ellipse ist gleich weit von F_- und von dem Leitkreis entfernt. Dies liefert eine einfache Konstruktion von Punkten und Tangenten der Ellipse.



Ellipse mit Leitkreis, Brennstrahlen und Tangente.
$p \cdot |v| = const$ ist der Drehimpuls auf Planetenbahnen, nach Kepler und Newton.