Differentialgeometrie I

Wir wünschen Ihnen schöne Festtage und alles Gute zum Jahreswechsel

In der Vorlesung bin ich mit der hyperbolischen Geometrie nicht so weit gekommen, wie ich beim Stellen der Aufgaben 9 angenommen hatte. Aus diesem Grund wiederhole ich die Aufgaben 9.2, 9.3. Mir liegt viel daran, daß Sie verstehen, daß sich all das, was wir in $\mathbb{R}^2$ *und* $\mathbb{S}^2$ *geübt haben, auch in der Hyperbolischen Ebene machen läßt.*

Aufgabe 10.1 (Kreistreue der stereographischen Projektion)
Wie bei der Sphäre auch ist die stereographische Projektion geometrisch übersichtlicher, wenn man auf die dem Projektionszentrum gegenüber liegende Tangentialebene projiziert, während die Formeln bequemer sind, wenn man auf die parallele Ebene durch 0 projiziert:

$$\mathrm{St}: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+x_0}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{St}^{-1}: \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda\xi \\ \lambda\eta \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{2}{1-\xi^2-\eta^2}.$$

Wir hatten in der Vorlesung gesehen, daß St^{-1} alle Kreise, *die den Einheitskreis senkrecht schneiden*, auf ebene Schnitte durch $0 \in \mathbb{R}^3$, also auf Geodätische, abbildet.
Zeigen Sie: St^{-1} bildet beliebige Kreise auf beliebige ebene Schnitte des Hyperboloids ab.

Aufgabe 10.2 = 9.2 (Evolventen in der Hyperbolischen Ebene)
(a) Es seien $p, v \in \mathbb{R}^3$ gegeben mit $\langle p,p\rangle^L = -1, \langle p,v\rangle^L = 0, \langle v,v\rangle^L = +1$.
Zeigen Sie, daß $c(s) := p \cdot \cosh s + v \cdot \sinh s$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der Hyperbolischen Ebene ist. Ferner: Die Kurve liegt in einem 2-dimensionalen Vektorunterraum des $\mathbb{R}^3$, ist also eine Geodätische.
Mit dieser Tatsache können wir Parallelkurven, Evolventen und Rollkurven beschreiben.
(b) Verallgemeinern Sie Aufgaben 3.3, 3.4 in die Hyperbolische Ebene: Durch was für eine Formel wird die Fadenevolvente beschrieben? Warum ist die Länge des abgewickelten Fadens der Krümmungsradius der Evolvente?

Aufgabe 10.3 = 9.3 (Ellipsen in der Hyperbolischen Ebene)
Betrachten Sie einen Kreis vom hyperbolischen Radius $2a$ um $F_1 = (-1, 0, 0)$ und darauf einen beliebigen Punkt $P(\varphi)$. Wählen Sie außerdem einen Punkt $F_2 := (\cosh 2e, \sinh 2e, 0)$ mit $2e < 2a$. Wir definieren die Ellipse mit den Fokalpunkten F_1, F_2 und der Abstandssumme $2a$ der Kurvenpunkte von den Fokalpunkten. Wir wollen die euklidische Ellipsenkonstruktion von Blatt 1 in die Hyperbolische Ebene verallgemeinern und rechnerisch nachvollziehen, wenn auch nur als Anleitung zum numerischen Rechnen. (Sie sollen nicht versuchen, die Gleichungen von Hand aufzulösen. 9.2(a) wird vorausgesetzt. Wiederholen Sie, wie Sie die folgenden Fragen auf $\mathbb{S}^2$ beantworten würden und modifizieren Sie die Antwort.)

(a) Wie kann man den Mittelpunkt $M(\varphi)$ zwischen F_2 und $P(\varphi)$ berechnen und wie den Tangenteneinheitsvektor $T(\varphi)$ in $M(\varphi)$ der Geodätischen von F_2 über $M(\varphi)$ nach $P(\varphi)$?
(b) Wie kann man einen zu $T(\varphi)$ senkrechten Tangentialvektor $n(\varphi)$ der hyperbolischen Ebene finden und wie mit seiner Hilfe die Mittelsenkrechte zwischen F_2 und $P(\varphi)$ hinschreiben?
(c) Warum schneidet die Mittelsenkrechte aus (b) den Kreisradius $F_1P(\varphi)$ in einem Ellipsenpunkt $E(\varphi)$ und warum verläuft die Mittelsenkrechte im übrigen außerhalb der Ellipse? (Vergleichen Sie das Bild auf Blatt 1.)