Differentialgeometrie I

Aufgabe 4.1 (Krümmung und Abstand von der Tangente)
Es sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig differenzierbare Raumkurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist.
Warum ist der Abstand des Punktes $c(s)$ von der Tangente im Punkte $c(s_1)$ höchstens $|c(s) - c(s_1) - c'(s_1)(s - s_1)|$ und warum ist dies höchstens $0.5 \max(|\kappa|)(s - s_1)^2$?

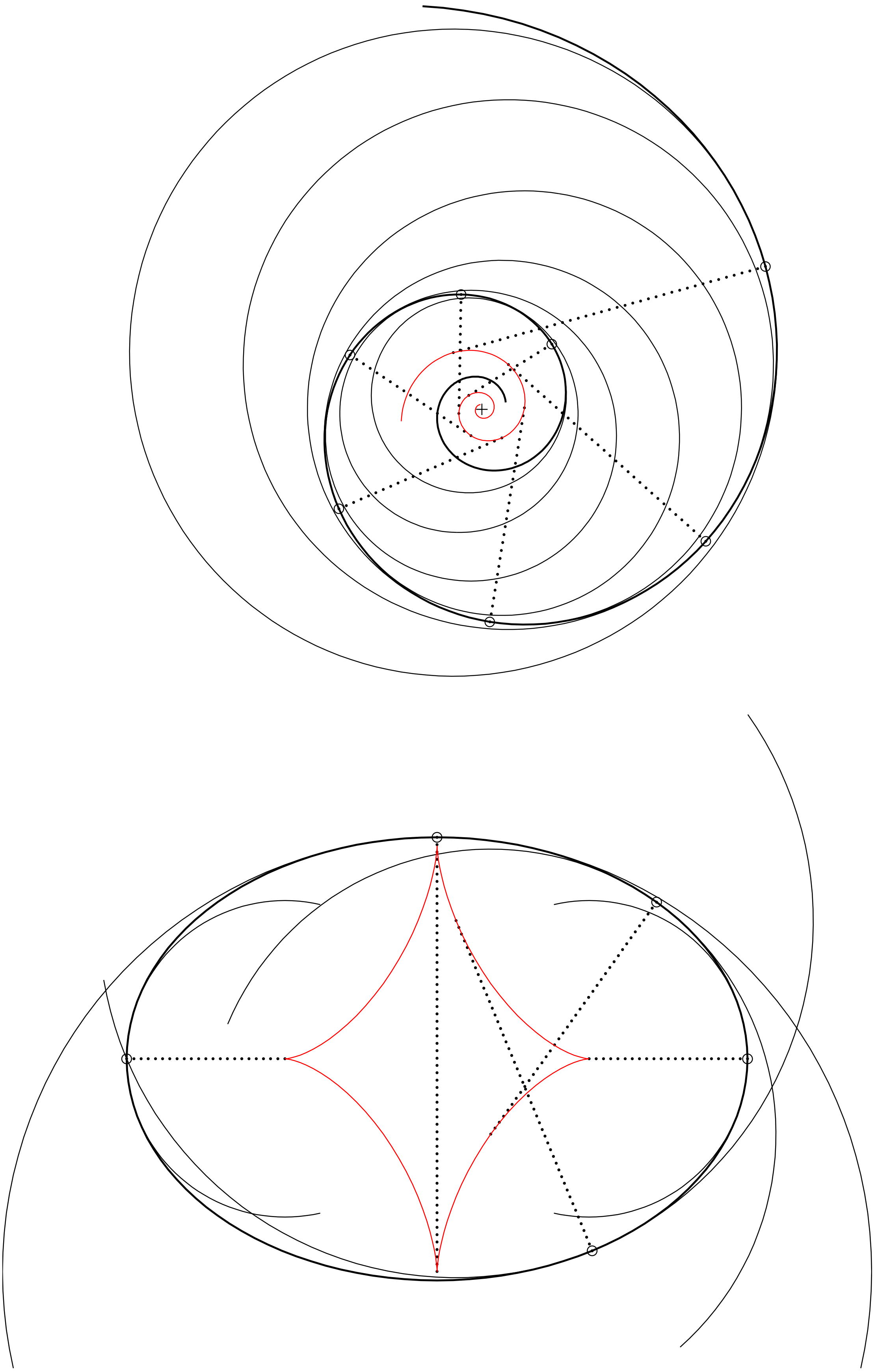
Aufgabe 4.2 (Böschungslinien und Frenettheorie)
Eine Böschungslinie ist eine dreimal stetig differenzierbare Raumkurve mit Krümmung $\kappa \neq 0$ (damit sie mit Frenettheorie behandelbar ist) mit folgender Eigenschaft: Es gibt einen (als vertikal vorzustellenden) Einheitsvektor e, mit dem die $\dot{c}(t)$ einen konstanten Winkel φ bilden, bei Bogenlängenparametrisierung also $\langle e, c'(s)\rangle = \cos\varphi$.
(a) Es sei $\{c', \mathcal{H}, \mathcal{B}\}$ die Frenetbasis von c. Schreibe $e = \cos\varphi \cdot c' + a(s)\cdot\mathcal{H} + b(s)\cdot\mathcal{B}$. Folgere aus den Frenetgleichungen $a(s) = 0$, dann $b(s) = \sin\varphi$, schließlich $\kappa\cos\varphi + \tau\sin\varphi = 0$.
(b) Folgere umgekehrt aus $\kappa(s) \neq 0$ und aus $\kappa\cos\varphi + \tau\sin\varphi = 0$, daß die durch $\kappa(s), \tau(s)$ definierte Frenetkurve eine Böschungslinie ist. (Tip: Wie würden Sie e raten?)

Aufgabe 4.3 (Geschlossene Raumkurven konstanter Krümmung)
In $\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$ zeigt unsere Rekonstruktion von Kurven aus ihrer Krümmungsfunktion, daß Kurven konstanter Krümmung *Kreise* sind. Wir wollen in $\mathbb{R}^3$ andere Beispiele angeben. Zunächst definieren wir das *Tangentenbild* einer Raumkurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ als die sphärische Kurve

$$\frac{\dot{c}}{|\dot{c}|} : [a,b] \to \mathbb{S}^2. \qquad \text{(Sphärisches Tangentenbild)}$$

(a) Bestimme die Tangentenbilder der Schraubenlinien $S_{r,v}(t) := (r\cos t, r\sin t, vt)$. Für welche Wahl von v, r gibt es auf der Schraubenlinie zueinander senkrechte Tangentialvektoren $\dot{S}_{r,v}(t_1) \perp \dot{S}_{r,v}(t_2)$?
(b) Warum kann man aus dem Bogen $S_{r,v} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$ durch Spiegelung an den Ebenen, die durch die Endpunkte gehen und senkrecht auf den Tangenten stehen, eine geschlossene Raumkurve konstanter Krümmung machen?

Aufgabe 4.4 (Mehr zu Drehungen im $\mathbb{R}^3$)
(a) Schreibe die Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel 2α als Produkt von zwei 180° Drehungen, eine davon um die x-Achse. Welches ist die andere?
(b) Sei $|a| \le |b| \le |c|$ und $v_1 = (a, b, c)$ ein Einheitsvektor. Ergänze v_1 zu einer Orthonormalbasis $\{v_1, v_2, v_3\}$. Beschreiben Sie die Drehung mit Achse v_1 und Drehwinkel 2α als Produkt zweier 180° Drehungen, deren Achsen in der Ebene $\mathrm{span}(v_1, v_2)$ liegen.
(c) Seien A, B, C die Einheitsvektoren zu den Ecken eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ. Bezeichne mit $D_{2\alpha}(A)$, $D_{2\beta}(B)$, $D_{2\gamma}(C)$ die Linksdrehungen mit den Achsen A, B, C und den Drehwinkeln $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$.
Zeige: $D_{2\alpha}(A) \circ D_{2\gamma}(C) \circ D_{2\beta}(B) = \mathrm{id}$. Tip: Betrachten Sie die Spiegelungen an den Seiten des Dreiecks und erinnern Sie sich, daß man eine Drehung aus zwei Spiegelungen zusammensetzen kann.
Dies ergibt eine weitere Möglichkeit, eine Drehung aus zwei eventuell leichter zu beschreibenden Drehungen zusammenzusetzen.



Evoluten einer Spirale und einer Ellipse.

Die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte einer Kurve c heißt Evolute von c. Solange die Kurvenkrümmung κ streng monoton ist, ist die Evolute glatt, aber $\kappa'(t) = 0$ bedingt Spitzen. — **Satz:** Glatte Evolutenbögen von c haben Stücke von c als Evolventen.