Differentialgeometrie I

Aufgabe 6.1 (Parallelkurven und kritische Punkte)

Es sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine mit Bogenlänge parametrisierte Kurve und $n(t) = \mathrm{Rot}(-90°)\dot{c}(t)$ ihr Einheitsnormalenfeld. Wir definieren die *Parallelkurvenschar* mit Hilfe der Abbildung $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}^2,\ f(s, t) := c(t) + sn(t)$. Erinnerung: Die Kurven $c_\epsilon(t) = f(\epsilon, t)$ sind die *Parallelkurven* von c im Abstand ϵ.
(a) Stellen Sie fest, daß f an den meisten Stellen Höchstrang hat, also $\mathrm{rang}(Tf|_{(s,t)}) = 2$. Die übrigen Punkte (s, t) heißen *kritischen Punkte* von f. Charakterisieren Sie diese mit Hilfe der Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve c. Welche Kurve beschreiben die Bilder der kritischen Punkte von f? Oder: Geben Sie die Kurve der *kritischen Werte* von f an.
(b) Dagegen hat die Abbildung $F : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R},\ F(s, t) := (c(t) + sn(t), t)$ immer $\mathrm{rang}(TF|_{(s,t)}) = 2$. Aber an den kritischen Punkten von f bildet die Projektion $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Tangentialebene von $\mathrm{bild}(F)$ nicht bijektiv ab.

Aufgabe 6.2 (Stereographische Projektion und Kartenwechsel)

Wir definieren zwei Abbildungen $\mathrm{St}_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n - \{(0, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Hilfe der Funktion $f(x) := 2/(1 + |x|^2)$ durch $x \mapsto (f(x)x, \pm(f(x) - 1))$. Die Umkehrabbildung ${\mathrm{St}_\pm}^{-1}$ projiziert $\mathbb{S}^n \pm (0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von einem Pol nach $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
(a) Jede dieser beiden Abbildungen parametrisiert beinahe die ganze Sphäre. Bestimmen Sie den *Kartenwechsel* ${\mathrm{St}_-}^{-1} \circ \mathrm{St}_+ : \mathbb{R}^n - 0 \to \mathbb{R}^n - 0$.
(b) Es sei $x(t)$ eine differenzierbare Kurve in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $T\mathrm{St}_+\dot{x}(t)$ für $\frac{d}{dt}(\mathrm{St}_+ \circ x(t))$. Bestimmen Sie $\lambda(x)$ in $\langle T\mathrm{St}_+\dot{x}(t),\ T\mathrm{St}_+\dot{x}(t)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \lambda(x(t)) \cdot \langle \dot{x}(t),\ \dot{x}(t)\rangle_{\mathbb{R}^n}$. Folgern Sie die Winkeltreue von St_+. (Wie würden Sie Winkeltreue einer Abbildung F definieren?)

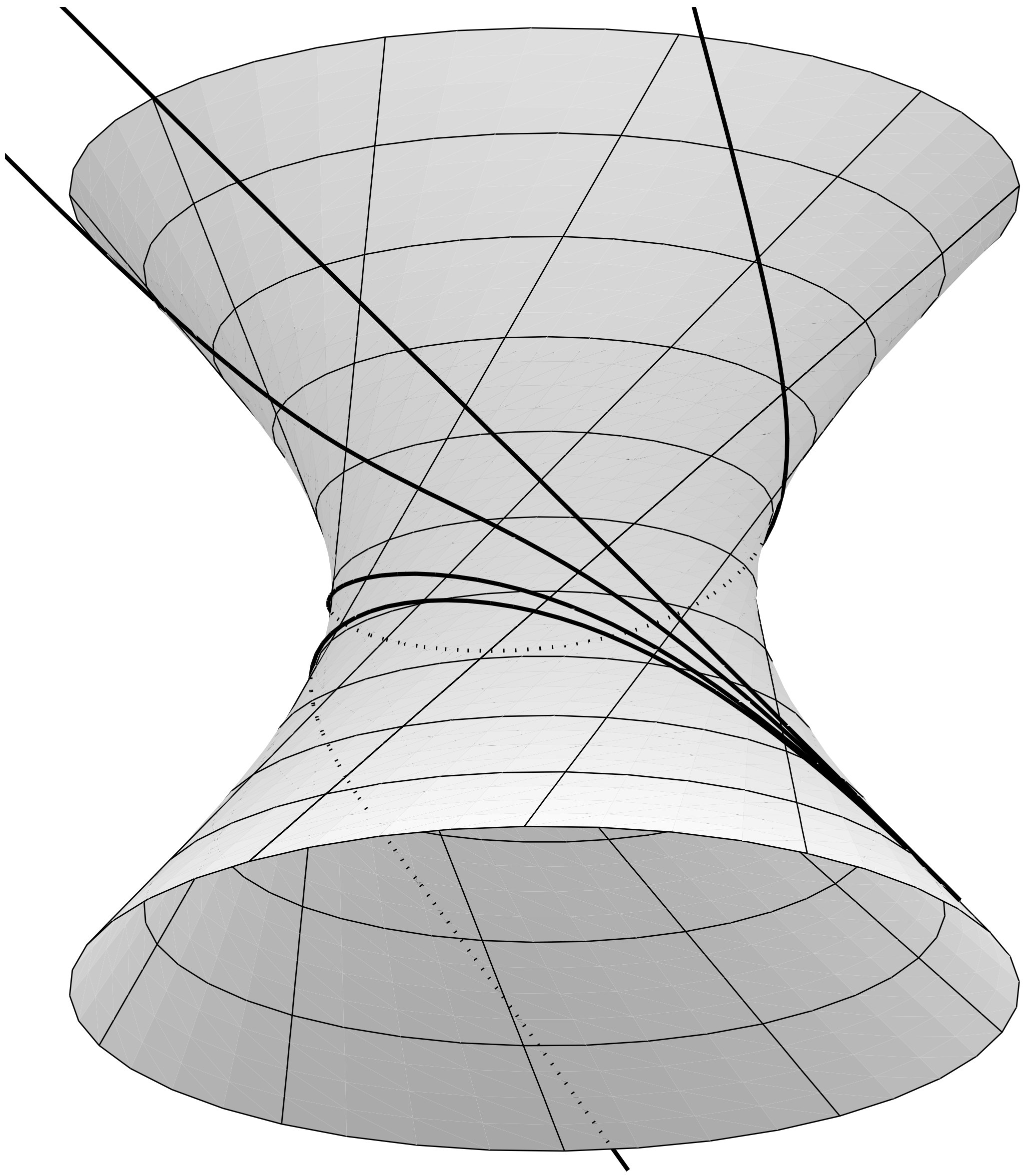
Aufgabe 6.3 (Einschaliges Hyperboloid als Rotationsfläche)

Es sei $c = (c_1, c_2, c_3) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\dot{c}_3 > 0,\ c_1^2 + c_2^2 > 0$.
(a) Wir betrachten die *Rotationsfläche*, die durch Drehung von c um die z-Achse entsteht. Der Schnitt der Fläche mit der x, z-Ebene $(x > 0)$ heißt *Meridiankurve*. Geben Sie die Meridiankurve $m(t) = (??, c_3(t))$ an sowie eine Parametrisierung der Rotationsfläche, die die Meridiankurve benutzt. (Bitte nicht an der Rotation um die z-Achse scheitern.)
(b) Als Beispiel betrachten wir die Gerade $c(t) = e_2 + t(e_1 + e_3)$. Die Rotation von c erzeugt eine Schar von Geraden auf der Rotationsfläche; bestimmen Sie eine weitere Schar von Geraden. Bestimmen Sie die Meridiankurve, und beschreiben Sie die Fläche auch als Niveau einer quadratischen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.4 (Differentialgleichungen für Höhen– und Böschungslinien)

Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert Flächenscharen als Niveaus $\{f(x, y, z) = w\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir setzen $\mathrm{grad} f \neq 0$ auf den Flächen voraus.
(a) Definieren Sie ein ein horizontales Vektorfeld H auf U (also senkrecht zur z-Richtung), das tangential an die Flächen ist. Gibt es Ausnahmepunkte, an denen H nicht definiert ist? Welche Differentialgleichung beschreibt die *Höhenlinien*? (H benutzen!) (Als unparametrisierte Kurven sind Sie gegeben durch $f(x, y, const) = w$.) Können Sie einen

Existenzsatz zitieren, der sich auf diese Differentialgleichung anwenden läßt?
(b) Um die *Fallinien* der Flächen analog zu beschreiben, definieren Sie ein an die Niveauflächen tangentiales Vektorfeld F, das senkrecht auf H steht. (Erinnern Sie sich an das Kreuzprodukt.)
(c) Kurven auf einer Fläche, deren Tangente einen konstanten Winkel $90° - \alpha$ mit der Vertikalen e_3 einschließt, heißen *Böschungslinien*. Diese Kurven haben konstante Steigung $\tan \alpha$ und wurden früher möglichst zur Trassierung steiler Eisen- und Zahnradbahnen benutzt. Geben Sie das entsprechende an die Niveaus tangentiale Vektorfeld B_α an.
(d) Die Lösungen der drei Differentialgleichungen (a) - (c), die tangential an ein Niveau starten, bleiben auf diesem Niveau, warum?
(e) Für das Beispiel $f(x, y, z) = z - xy$ können Sie die Differentialgleichungen (a),(b) explizit integrieren, wenn Sie ausnutzen, daß Sie die Längen von H und F wählen können, um das Lösen leicht zu machen.



Rotationshyperboiloid mit Breitenkreisen, einer Geradenschar und geodätischen Linien.