S2A1 - Hauptseminar Algebra
Darstellungen endlicher Gruppen

Andreas Mihatsch[1]

Operiert eine Gruppe auf einem Vektorraum, so spricht man von einer Darstellung. Ziel des Seminars ist es, mit diesem fundamentalen Begriff vertraut zu werden. Im Folgenden soll ein kleiner Eindruck gegeben werden.

Definition 1. *Sei G eine Gruppe. Eine Darstellung von G auf einem k-Vektorraum V ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\rho : G \longrightarrow GL_k(V).$$

Im Seminar werden G endlich und V endlich-dimensional sein. Nach Wahl einer Basis $V \cong k^n$ ist eine Darstellung also ein Tupel von Matrizen $(\rho(g))_{g \in G}$, sodass für alle $g, h \in G$ die Beziehung $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ gilt.

In dieser Formulierung ist der Begriff sehr konkret und wir werden mit der Zeit viele Beispiele kennenlernen. Dabei werden wir Schritt für Schritt eine elegante Theorie entwickeln, die Darstellungen im Allgemeinen klassifiziert und zugänglich macht. Ein Hauptresultat wird das folgende Theorem sein.

Theorem 2. *Sei G eine endliche Gruppe. Es gibt nur endlich viele irreduzible Darstellungen (bis auf Isomorphismus) von G auf $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Seien die folgenden Darstellungen eine vollständige Liste,*

$$\rho_i : G \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

(1) Die Anzahl k ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen in G.

(2) Die Dimensionen der V_i sind endlich, teilen die Gruppenordnung $|G|$, und erfüllen

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim_{\mathbb{C}} V_i)^2 = |G|.$$

Zum Beispiel werden wir die symmetrische Gruppe in vier Buchstaben, die S_4, betrachten. Sie hat Ordnung 24 und besitzt 5 Konjugationsklassen. Die entsprechenden irreduziblen Darstellungen haben die Dimensionen $1, 1, 2, 3$ und 3. Es gilt, wie erwartet,

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24.$$

Theorem 2 werden wir nach Vortrag 8 vollständig bewiesen haben. Auf dem Weg dorthin und in den anschließenden Vorträgen werden wir aber auch viele andere Aussagen kennen lernen.

[1] mihatsch@math.uni-bonn.de

Vorträge

Wir folgen dem sehr schönen Buch [2] von Jean–Pierre Serre. Es teilen sich immer zwei Teilnehmende zwei Vorträge und bereiten diese gemeinsam vor.

1. **Gruppen:** Definition, Beispiele: Abelsche Gruppen, S_n, A_n, Diedergruppen, $GL_n(\mathbb{F}_p)$. Morphismen, Gruppenoperationen, Untergruppen, Nebenklassen, Normalteiler.
2. **Darstellungen, Reduzibilität:** Definition einer Darstellung, Matrizenform, Isomorphie. Elementare Beispiele: Triviale Darst., Charaktere, reguläre Darst., Permutationsdarst., evtl. weitere. Unterdarstellungen, Komplemente, irreduzible Darstellungen, (nicht eindeutige) Zerlegung in irred. Darst. [2], 1.1–4
3. **Konstruktionen neuer Darstellungen, Charaktere:** Summe, Tensorprodukt, symmetrisches und alternierendes Produkt. Definition von Charakteren, Eigenschaften, Verhalten unter $\oplus, \otimes, \ldots$. [2], 1.5–2.1
4. **Charaktere II:** Schurs Lemma, elementare Anwendungen, Orthogonalität von Charakteren und Folgerungen, Zerlegung der regulären Darstellung. [2], 2.2–4
5. **Charaktere III:** Anzahl der irreduziblen Darstellungen, Beispiel: S_3, kanonische und explizite Zerlegung. [2], 2.5–7
6. **Untegruppen, Produkte, induzierte Darstellung:** Abelsche Untergruppen, Darstellungen von $G_1 \times G_2$, Definition von induzierten Darstellungen, Beispiele, Existenz und Eindeutigkeit, Charakter. [2], 3
7. **Beispiele:** Zyklische Gruppen, Diedergruppen, A_4, S_4. [2], 5
8. **Die Gruppenalgebra:** $\mathbb{C}[G]$ (evtl. auch $K[G]$), Zerlegung von $\mathbb{C}[G]$, Zentrum, Eigenschaften ganzer algebraischer Zahlen, Ganzheit von Charakteren, Anwendungen. [2], 6.2–5
9. **Darstellungen von S_n:** Beschreibung der irreduziblen Darstellungen, Young-Tableaus, Beispiel: $n = 4$, Ganzzahligkeit der Charaktere. [1], 4.1–2
10. **Mackeys Irreduzibilitätskriterium für induzierte Darstellungen:** Induktion, Charakter der induzierten Darstellung, Frobenius-Reziprozität, Mackeys Irreduzibilitätskriterium. [2], 7
11. **Beispiele für induzierte Darstellungen:** Normale Untergruppen und Anwendung auf den Grad irreduzibler Darstellungen, semidirekte Produkte, auflösbare Gruppen, Darstellungen von p-Gruppen. [2], 8
12. **und 13. Sätze von Artin und Brauer:** Virtuelle Charaktere, Satz von Artin, Induktion von p-elementaren Untergruppen, Satz von Brauer, Anwendungen. [2], 9, 10 u. 11

Literatur

[1] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*

[2] J.–P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*