

Einführung in die Algebra — Übungsblatt 2

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[Abgabe: 26. Oktober 2017, vor der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Für die folgenden Paare (G, H) von Gruppen und Untergruppen, bestimmen Sie, ob H ein Normalteiler von G ist oder nicht. Falls H ein Normalteiler ist, geben Sie eine bekannte Gruppe G' an, so dass $G/H \cong G'$ ist (begründen Sie ihre Antwort).

- (a) $\{e\} < G$ (für beliebiges G)
- (b) $G = (\mathbb{Q}, +)$ und $H = \mathbb{Z} < \mathbb{Q}$
Hinweis: denken Sie an einer Aufgabe des vorherigen Übungsblatts.
- (c) $G = (\mathbb{C}, +)$ und $H = \mathbb{R} < \mathbb{C}$
Hinweis: definieren Sie einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $x + iy \mapsto y$.
- (d) $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $H = \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$
Hinweis: definieren Sie einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C}^ \rightarrow S^1 = \{e^{it} \mid t \in [0, 2\pi)\}$ durch $re^{it} \mapsto e^{2it}$.*
- (e) $SO(2) < SO(3)$ (die Untergruppe aller Rotationen von \mathbb{R}^3 , die die z -Achse fix lässt)
- (f) $O(2) < GL(2, \mathbb{R})$
- (g) $SO(n) < O(n)$
- (h) $S_n < WB_n$, wobei WB_n die Gruppe aller Vorzeichen-Permutationen der Menge $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$ ist, und ein Element $g \in WB_n$ genau dann zu S_n gehört, wenn es kein Vorzeichen ändert.
- (i) $GL(2, \mathbb{R}) < GL(2, \mathbb{C})$

Aufgabe 2. (3 Punkte)

- (a) Sei G und H zwei Gruppen, und $G \times H$ das Produkt der Mengen G und H . Definieren Sie eine Struktur einer Gruppe auf $G \times H$ und zeigen Sie, dass dies wohldefiniert ist.
- (b) Zur Erinnerung: D_6 ist die Gruppe aller Isometrien eines regelmäßigen Hexagons. Konstruieren Sie eine Untergruppe $G < D_6$, so dass G isomorph zu S_3 ist. Ist D_6 isomorph zum Produkt $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
- (c) Sei G eine endliche Gruppe, $H < G$, so dass $|G| = 2 \cdot |H|$. Zeigen Sie, dass $H \triangleleft G$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Für n eine positive natürliche Zahl sei $\varphi(n)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen m im Intervall $1 \leq m \leq n$, die zu n teilerfremd sind. Dies definiert die *Eulerische φ -Funktion* $\varphi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$.

- (a) Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n . Zeigen Sie, dass es genau $\varphi(n)$ verschiedene Elemente $g \in G$ gibt mit $\langle g \rangle = G$.
- (b) Wann gibt es ein Element g so dass $|\langle g \rangle| = \frac{1}{7}|G|$ gilt?
- (c) Zeigen Sie: Für p eine Primzahl und $\ell \geq 1$ gilt $\varphi(p^\ell) = p^{\ell-1}(p-1)$.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $\ell = 1$.
- (d) Ferner, falls n und m teilerfremd sind, so gilt $\varphi(n)\varphi(m) = \varphi(nm)$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

- (a) Sei S_{n+1} die Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1, \dots, n+1\}$ und sei $S_n < S_{n+1}$ die Untergruppe aller Permutationen, die das Element $n+1$ auf sich selbst abbilden. Zeigen Sie, dass die Regel

$$(g_1 S_n, g_2 S_n) \mapsto g_1 g_2 S_n \quad : \quad S_{n+1}/S_n \times S_{n+1}/S_n \longrightarrow S_{n+1}/S_n$$

nicht wohldefiniert ist. Folgern Sie, dass S_n kein Normalteiler von S_{n+1} ist. (Dies können Sie auch direkt beweisen.)

- (b) Sei $\varphi: G \rightarrow H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern K . Zeigen Sie, dass die Abbildung von Mengen

$$\{U \mid U < G \text{ Untergruppe mit } K \subseteq U\} \longrightarrow \{W \mid W < H \text{ Untergruppe}\}$$

durch $U \mapsto \varphi(U)$ wohldefiniert und bijektiv ist. Kann man "Untergruppe" durch "Normalteiler" ersetzen?

- (c) Bestimmen Sie alle Untergruppen U von $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Welche sind Normalteiler? Wie sieht jeweils G/U aus?

Bonusaufgabe 5. (4 Bonuspunkte)

- (a) Der Kommutator $[G, G]$ einer Gruppe G ist die Untergruppe aller Elemente der Form

$$g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} g_2 h_2 g_2^{-1} h_2^{-1} \dots \dots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}$$

für $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_n \in G$ und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass dies ein Normalteiler von G ist.

- (b) Eine perfekte Gruppe G ist eine, für die $G = [G, G]$ gilt. Sei $P < G$ eine perfekte Untergruppe von G . Zeigen Sie, dass P in $[G, G]$ enthält ist.

- * (c) Zeigen Sie, dass es für jede gegebene Gruppe G eine *größte* perfekte Untergruppe gibt, dass heißt, eine perfekte Untergruppe $\text{Perf}(G) < G$, so dass jede perfekte Untergruppe $P < G$ in $\text{Perf}(G)$ enthält ist.

Hinweis: seien P_1 und P_2 perfekte Untergruppen von G . Dann müssen Sie zeigen, dass es eine weitere perfekte Untergruppe P_3 von G gibt, die sowohl P_1 als auch P_2 enthält.

- * (d) Zeigen Sie, dass $\text{Perf}(G)$ ein Normalteiler von G ist.

- (e) Folgern Sie, dass $G/\text{Perf}(G)$ immer eine wohldefinierte Gruppe ist.

- (f) Zeigen Sie:

(i) Die Quotientengruppe $G/\text{Perf}(G)$ ist trivial, genau dann, wenn G perfekt ist.

* (ii) Die Quotientengruppe $G/\text{Perf}(G)$ ist abelsch, genau dann, wenn $[G, G]$ perfekt ist.

*NB: Wenn ein Teil einer Aufgabe mit dem Symbol * versehen wird, zeigt dies, dass dieser Teil etwas anspruchsvoller sein sollte.*

Allgemeine Instruktionen.

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer Name und Tutorium von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Donnerstags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung (math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html) heruntergeladen werden.
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Donnerstags **vor** der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind mindestens 50% der Übungspunkte erforderlich.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten. Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.