Einführung in die Algebra — Übungsblatt 3

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 2. November 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (7 Punkte)

Für eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$ sei $\nu_p(n)$ die größte ganze Zahl $k \geqslant 0$ so dass $p^k \mid n$.

(a) Beweisen Sie die Legendre-Formel, d.h. $\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor n/p^i \rfloor$.
Hier ist $\lfloor \ \rfloor$ die Abrundungsfunktion: für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.
Erklären Sie zuerst, warum diese Summe für eine gegebene n tatsächlich endlich ist.

(b) Benutzen Sie diese Formel um Folgendes zu beweisen: wenn $p \nmid m$, dann ist

$$\nu_p\left(\binom{p^r m}{p^k}\right) = r - k.$$

Der Rest dieser Aufgabe ist ein Beweis vom dritten Teil des Satzes von Sylow. Sei G eine endliche Gruppe, $|G| = p^r m$ wobei p eine Primzahl ist, und $p \nmid m$. Sei H eine p-Untergruppe von G und $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

(c) Wenn $H < N_G(S)$, beweisen Sie, dass HS/S eine wohldefinierte p-Gruppe ist.
Hinweis: benutzen Sie einen der Isomorphiesätze.

(d) Folgern Sie, dass dies tatsächlich die triviale Gruppe ist, und deshalb ist $H < S$.

(e) Die p-Sylowuntergruppe S operiert auf $\mathrm{Syl}_p(G)$ durch Konjugation. Zeigen Sie, dass es genau einen Fixpunkt gibt.
Hinweis: zeigen Sie, dass $S' \in \mathrm{Syl}_p(G)$ genau dann ein Fixpunkt ist, wenn $S' < N_G(S)$.

(f) Folgern Sie, dass $|\mathrm{Syl}_p(G)| \equiv 1 \pmod p$.

(g) Zeigen Sie auch, dass $|\mathrm{Syl}_p(G)| = [G : N_G(S)]$, und deshalb ist $|\mathrm{Syl}_p(G)|$ ein Teiler von m.
Hinweis: betrachten Sie die Operation der ganzen Gruppe G auf $\mathrm{Syl}_p(G)$ durch Konjugation.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Für $x \in X$ und $g \in G$ zeigen Sie, dass G_x und G_{gx} in derselben Konjugationsklasse liegen.

Betrachten Sie die folgenden Paare (G, X) mit der gegebenen Operation von G auf X. Begründen Sie jeweils kurz, dass die behauptete Operation tatsächlich eine Operation ist. Beschreiben Sie die Bahnen und alle Stabilisatoren G_x bis auf Konjugation und insbesondere die Fixpunkte X^G.

(b) $G = S_3$ und X ist der Simplex $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geqslant 0 \text{ und } x + y + z = 1\}$ mit der Operation durch Permutation der Koordinaten,

(c) $G = SL(n, \mathbb{R})$ und $X = \mathbb{R}^n$, durch Multiplikation von Matrix mit Vektor,

(d) $G = GL(n, \mathbb{R})$ und $X = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid |A| = 2\}$, durch Multiplikation von Matrix mit Vektor für jedes Element in A,

*(e) $G = GL(n, \mathbb{R})$ und $X = \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid |A| = k\}$ für eine ganze Zahl $k \geqslant 3$, mit der Operation wie in (d) beschrieben,

(f) $G = S_n$ und $X = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) = \{A \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ Teilmenge}\}$, durch Permutation der Elemente in $\{1, \dots, n\}$,

*(g) $G = S_n$ und $X = \{f \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \text{ Funktion}\}$, mit der Operation definiert durch $g \cdot f(i) = f(g^{-1}(i))$ für $g \in G$, $f \in X$ und $1 \leqslant i \leqslant n$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

(a) Sei G eine endliche p-Gruppe. Konstruieren Sie eine endliche Normalreihe, deren Faktoren isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sind. Damit folgt, dass G auflösbar ist.
Hinweis: finden Sie ein Element $g \in Z(G)$, das nicht trivial ist. Dann ist $\mathrm{ord}(g) = pm$ für irgendeine m, also setzten Sie $G_1 = \langle g^m \rangle$.

(b) Sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^2$ für p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass G entweder zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ isomorph ist.

(c) Geben Sie eine Normalreihe wie im Teil (a) für jede Gruppe der Ordnung 4 explizit an.

(d) Sei $B_n(\mathbb{Z})$ die Gruppe aller invertierbaren* oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Berechnen Sie die Kommutatoruntergruppe $[B_n(\mathbb{Z}), B_n(\mathbb{Z})]$, und zudem auch die abgeleitete Reihe von $B_n(\mathbb{Z})$. Folgern Sie, dass $B_n(\mathbb{Z})$ auflösbar ist.
*Zur Verdeutlichung: das obige Wort "invertierbar" bedeutet, dass es eine inverse Matrix gibt, deren Einträge auch in $\mathbb{Z}$ sind.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Sei R ein Ring und $I \triangleleft R$ ein Ideal. Dann ist R/I auf natürliche Weise wieder ein Ring.

(b) Formulieren und beweisen Sie ein Analogon des Homomorphiesatzes für Ringe.

NB: Wenn ein Teil einer Aufgabe mit dem Symbol $*$ versehen wird, zeigt dies, dass dieser Teil etwas anspruchsvoller sein sollte.

Allgemeine Instruktionen.

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer Name und Tutorium von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Donnerstags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung (math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html) heruntergeladen werden.
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Donnerstags **vor** der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind mindestens 50% der Übungspunkte erforderlich.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten. Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.