Einführung in die Algebra — Übungsblatt 4

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 9. November 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (6 Punkte)

(a) Seien A und B zwei Gruppen und sei $\phi\colon A \to \mathrm{Aut}(B)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass die folgende Regel eine wohldefinierte Gruppenstruktur auf der Menge $B \times A$ ist:

$$(b_1, a_1) \cdot (b_2, a_2) \ = \ (b_1\phi(a_1)(b_2), a_1a_2).$$

Wir nennen die auf diese Weise definierte Gruppe $B \rtimes_\phi A$.

(b) Seien $s\colon H \to G$ und $q\colon G \to H$ zwei Gruppenhomomorphismen, so dass die Gleichung $q \circ s = \mathrm{id}_H$ gilt. Definieren Sie einen Gruppenhomomorphismus $\phi\colon H \to \mathrm{Aut}(\ker(q))$ durch $\phi(h)(g) = s(h).g.s(h)^{-1}$. Zeigen Sie, dass ϕ wohldefiniert ist und dass $G \cong \ker(q) \rtimes_\phi H$.

(c) Von Blatt 1, Aufgaben 4 und 5 folgern wir jetzt, dass

$$D_n \ \cong \ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Okt} \ \cong \ S_4 \rtimes_\upsilon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

für geeignete $\psi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ und $\upsilon\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(S_4)$. Beschreiben Sie ψ und υ.

*(d) Zeigen Sie, dass es tatsächlich mehrere Homomorphismen υ gibt, so dass der obige Isomorphismus für Okt gilt. Deshalb kann man *nicht* aus $\phi_1 \neq \phi_2\colon A \to \mathrm{Aut}(B)$ folgern, dass $B \rtimes_{\phi_1} A$ und $B \rtimes_{\phi_2} A$ nicht isomorph sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es für ψ?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

(a) Beschreiben Sie explizit für zwei beliebige Ideale I, J in $R = \mathbb{Z}$ die Summe $I + J$, den Schnitt $I \cap J$ und das Produkt $I \cdot J$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein Linksideal (bzw. Rechtsideal) in einem Ring an, das kein Ideal ist.

(c) Seien R und S zwei Ringe. Dann ist $R \times S$ auf natürliche Weise wieder ein Ring.

(d) Gelten für Ringe analoge Aussagen zu den Isomorphiesätzen für Gruppen? Begründen Sie ihre Antwort ausführlich.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Sei R ein Ring, nicht notwendig kommutativ. Ein Element $a \in R$ heißt *Links-Nullteiler* wenn es ein weiteres Element $0_R \neq b \in R$ gibt, so dass $a \cdot b = 0_R$. Es heißt *Rechts-Nullteiler* wenn es $0_R \neq b \in R$ gibt, so dass $b \cdot a = 0_R$. Es heißt *Einheit* wenn es $b \in R$ gibt, so dass $a \cdot b = b \cdot a = 1_R$.

(a) Zeigen Sie, dass $R^\star \subseteq R$ durch Multiplikation eine Gruppe ist.

*(b) Geben Sie ein Beispiel für einen Links-Nullteiler in einem Ring an, der kein Rechts-Nullteiler ist.

Für die folgende Ringe R, beschreiben Sie jeweils die Einheitengruppe $R^\star$ und alle Rechts- bzw. Links-Nullteiler.

(c) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, (*Hinweis: Aufgabe 3 von Blatt 2 könnte nützlich sein.*)

(d) $R = K$ ein Körper,

(e) $R = M_n(\mathbb{R})$ der Ring aller $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$,

(f) $R = \mathbb{R}[x]$ der Polynomring in einer Variable mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$,

(g) $R = K \times L$ das Produkt (siehe Aufgabe 2(c)) von zwei Körpern K und L.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

(a) Sei $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ die Menge aller Primzahlen und sei A die Menge aller Folgen $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ mit $n_i \in \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$. Definieren Sie eine Struktur eines Rings auf A.

(b) Sei $B < A$ die Untergruppe aller Reihen $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ so dass $n_i \neq 0$ für nur endlich viele Indizes i. Prüfen Sie zunächst, dass dies wirklich eine Untergruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}(b)$ endlich ist für jedes $b \in B$. Man nennt B dann *Torsionsgruppe*.

(d) Sei G eine beliebige Torsionsgruppe. Dann definieren wir $\exp(G) = \mathrm{kgV}\{\mathrm{ord}(g) \mid g \in G\}$ wenn dies endlich ist und ∞ sonst.
Sei R ein Ring so dass $(R, +)$ eine Torsionsgruppe ist. Zeigen Sie: $\exp(R, +) = \mathrm{ord}(1_R)$.

(e) Zeigen Sie, dass $\exp(B) = \infty$.

(f) Folgern Sie, dass es *keine* Ringstruktur auf B gibt, mit dieser abelschen Gruppe als additive Gruppe.

(g) Warum kann man nicht einfach die Ringstruktur von A auf B einschränken?

NB: Wenn ein Teil einer Aufgabe mit dem Symbol $*$ versehen wird, zeigt dies, dass dieser Teil etwas anspruchsvoller sein sollte.

Allgemeine Instruktionen.

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer Name und Tutorium von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Donnerstags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung (math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html) heruntergeladen werden.
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Donnerstags **vor** der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind mindestens 50% der Übungspunkte erforderlich.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten. Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.