Einführung in die Algebra — Übungsblatt 8

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 7. Dezember 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (5 Punkte $= 2 + 3 \cdot 1$)

Für ein Integritätsbereich K sei $K(t) = \mathrm{Quot}(K[t])$.

(a) Mithilfe der universellen Eigenschaft der Lokalisierung, konstruieren Sie eine injektive Abbildung $\mathbb{R}(t) \to \mathbb{C}(t)$. Zeigen Sie, dass ihr Bild $K \subset \mathbb{C}(t)$ der kleinste Unterkörper von $\mathbb{C}(t)$ ist, der $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}(t)$ und $t \in \mathbb{C}(t)$ enthält.

Zeigen Sie, dass die folgende Polynome über den gegebenen Ringen irreduzibel sind. Benutzen Sie dafür entweder das Kriterium von Eisenstein oder das Reduktionskriterium (siehe unten) für ein Primideal $(p) \subset \mathbb{Z}$.

(b) $t^3 + at^2 + (7-a)t + 1$ in $\mathbb{Z}[t]$, wobei $a \in \mathbb{Z}$,
(c) $t^3 + 3bt^2 + 8t + 1$ in $\mathbb{Z}[t]$, wobei $b \in \mathbb{Z}$,
(d) $t^5 + 4t^3 - t + \mathrm{i}t + 3 + 3\mathrm{i}$ in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}][t]$.

Aufgabe 2. (5 Punkte $= 2 + 1 + 2$)

(a) Seien $L /\!/ K$ und $M /\!/ L$ zwei Körpererweiterungen, so dass $[M /\!/ K] = [L /\!/ K] < \infty$. Zeigen Sie, dass $M \cong L$.
(b) Sei $L /\!/ K$ eine Körpererweiterung mit $[L /\!/ K] = p$ eine Primzahl und sei $a \in L \smallsetminus K$. Zeigen Sie, dass $K(a) = L$.
(c) Seien K ein Körper und A ein Integritätsbereich mit $K \subset A$, so dass jedes Element $a \in A$ algebraisch abhängig über K ist. Zeigen Sie, dass A ein Körper ist.

Aufgabe 3. (7 Punkte $= 5 \cdot 1 + 2$)

Sei $L /\!/ K$ eine Körpererweiterung. Bestimmen Sie in den folgenden Beispielen das Minimalpolynom des Elements $a \in L$ über K.

(a) $a = \mathrm{i} \in L = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{Q}$,
(b) $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \in L = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Q}$,
(c) $a = e^{\pi \mathrm{i}/3} \in L = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{Q}$,
(d) $a = e^{2\pi \mathrm{i}/p^2} \in L = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{Q}$, wobei p eine Primzahl ist,
(e) $a = \sqrt{11} \in L = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$.
(f) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\sqrt[5]{17})$.

Hinweis: für die Teile (c) *und* (d) *wäre Aufgabe 3 von Übungsblatt 7 nützlich.*

Aufgabe 4. (3 Punkte $= 2 + 1$)

Seien K ein Körper und $P \subset K$ der Primkörper von K. Sei ϕ ein Automorphismus von K, das heißt, eine Bijektion $\phi\colon K \to K$ mit $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ für je zwei Elemente $a, b \in K$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Element $a \in P$ ist $\phi(a) = a$. (Betrachten Sie zuerst das Beispiel $P = \mathbb{Q} \subset \mathbb{C} = K$.)
(b) Deshalb ist ϕ ein P-Automorphismus, d.h. ein Automorphismus des P-Vektorraums K.

Das Reduktionskriterium für ein Primideal $(p) \subset \mathbb{Z}$. Sei p eine Primzahl. Dann ist (p) ein Primideal im faktoriellen Ring $\mathbb{Z}$. Wir schreiben $\mathrm{can}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(p)$ für den kanonischen Ringhomomorphismus. Sei $f = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{Z}[t]$ ein Polynom mit $\mathrm{can}(a_n) \neq 0$, d.h. $p \nmid a_n$. Wenn $\mathrm{can}(a_0) + \mathrm{can}(a_1)t + \cdots + \mathrm{can}(a_n)t^n \in \mathbb{Z}/(p)[t]$ irreduzibel ist, dann ist f über $\mathbb{Q}$ irreduzibel. (Und wenn f außerdem primitiv ist, ist f auch über $\mathbb{Z}$ irreduzibel.)