

Lineare Algebra I
Lösungsvorschlag zum 14. Übungsblatt

U. Görtz

Aufgabe 1

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, und seien f und g Endomorphismen von V mit $f \circ g = g \circ f$. Zeige:

- a) Sind f und g diagonalisierbar, so sind sie simultan diagonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V , so dass $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ Diagonalgestalt haben.
- b) Sind f und g trigonalisierbar, so sind sie simultan trigonalisierbar, d. h. es existiert eine Basis B von V , so dass $c_B^B(f)$ und $c_B^B(g)$ obere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 2

Setze für $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \det(X \cdot E_n - A) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X], \\ \eta_A(X) &= \det(E_n - X \cdot A) = 1 + b_1X + b_2X^2 + \cdots + b_nX^n \in \mathbb{R}[X].\end{aligned}$$

- a) Gib Formeln an, mit denen man die a_i aus den b_j (und umgekehrt) berechnen kann.

Sei im folgenden A trigonalisierbar.

- b) Zeige, dass eine positive Zahl $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Reihe

$$S_A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \text{Spur}(A^{j+1}) \cdot x^j$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < c$ absolut konvergiert, und für diese x gilt (falls $\eta_A(x) \neq 0$):

$$S_A(x) = -\frac{\eta'_A(x)}{\eta_A(x)}.$$

(Es bezeichne η'_A die Ableitung von η_A nach x .)

- c) Leite aus b) eine Formel her, mit der man die a_i ($0 \leq i < n$) aus den Zahlen $n = \text{Spur}(A^0), \text{Spur}(A^1), \dots, \text{Spur}(A^n)$ rekursiv berechnen kann.

- d) Leite aus b) eine Formel her, mit der man aus den a_i ($0 \leq i < n$) die Zahlen $\text{Spur}(A^j)$ für alle $j \geq 1$ berechnen kann.

(*Hinweis zu c) und d)*: Multipliziere die Gleichung in b) auf beiden Seiten mit $\eta_A(x)$, fasse dann beide Seiten als Potenzreihen in x auf und führe einen Koeffizientenvergleich durch. Benutze dann a).)

Aufgabe 3

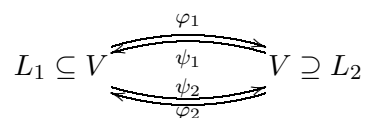
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler K -Vektorraum.

a) Seien $\varphi: V \rightarrow V$ und $\psi: V \rightarrow V$ lineare Abbildungen mit $\psi \circ \varphi = 0$, $\varphi \circ \psi = 0$. Zeige, dass eine Gerade (d.h. ein eindimensionaler Unterraum) $L \subseteq V$ existiert, so dass $\varphi(L) \subseteq L$ und $\psi(L) \subseteq L$.

b) Seien $\varphi_i: V \rightarrow V$ und $\psi_i: V \rightarrow V$, $i = 1, 2$, lineare Abbildungen mit $\psi_i \circ \varphi_i = 0$, $\varphi_i \circ \psi_i = 0$, $i = 1, 2$. Zeige: es gibt Geraden $L_i \subseteq V$, $i = 1, 2$, so dass

$$\varphi_1(L_1) \subseteq L_2, \psi_1(L_2) \subseteq L_1, \varphi_2(L_2) \subseteq L_1, \psi_2(L_1) \subseteq L_2.$$

Das läßt sich wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:



Die Geraden L_1 und L_2 sollen dabei unter den eingezeichneten Abbildungen ineinander abgebildet werden.

c) Sei nun $N \geq 1$ eine ganze Zahl, seien $\varphi_i: V \rightarrow V$ und $\psi_i: V \rightarrow V$, $i = 1, \dots, N$, lineare Abbildungen mit

$$\psi_i \circ \varphi_i = 0, \quad \varphi_i \circ \psi_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (*)$$

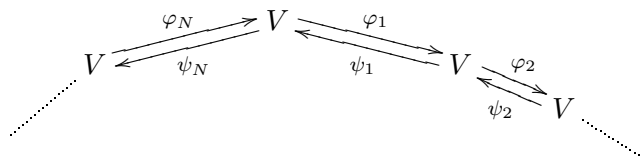
Zeige: es gibt Geraden $L_i \subseteq V$, $i = 1, \dots, N$, so dass

$$\varphi_i(L_i) \subseteq L_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, N - 1,$$

$$\psi_i(L_{i+1}) \subseteq L_i \text{ für } i = 1, \dots, N - 1,$$

$$\varphi_N(L_N) \subseteq L_1, \psi_N(L_1) \subseteq L_N.$$

Die Abbildungen φ_i, ψ_i lassen sich wie folgt in einem Diagramm veranschaulichen:



In jeder im Diagramm erscheinenden Kopie von V ist dann eine Gerade zu finden, so dass diese Geraden unter den Abbildungen φ_i, ψ_i ineinander abgebildet werden.

Bemerkung: Eine Variante dieser Aufgabe wird benutzt in dem Artikel *On the existence of F-crystals* von R. Kottwitz und M. Rapoport, siehe Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 1, 153–184. Der dort gegebene Beweis benutzt allerdings Methoden der algebraischen Geometrie.