**Prof. Dr. M. Rapoport**
**Dr. U. Görtz** **SS 2004**

**Lineare Algebra II**

**Präsenzaufgaben, Teil 1**

## Aufgabe 5

Sei $X$ eine Menge und sei $K$ ein Körper. Sei $V$ die Menge aller Abbildungen von $X$ nach $K$. Dann ist $V$ ein $K$-Vektorraum, wenn man Addition und Skalarmultiplikation elementweise definiert, das heißt:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\\ (af)(x) &:= af(x)\end{aligned}$$

für $f, g, \in V$, $a \in K$, $x \in X$.

Seien $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \geq 1$ paarweise verschiedene Elemente, und sei

$$W = \{f \in V;\ f(x_i) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}.$$

a) Zeige, dass $W$ ein Untervektorraum von $V$ ist.

b) Bestimme $\dim_K(V/W)$.

## Aufgabe 6

Sei $K$ ein Körper, und seien $V$ und $W$ Vektorräume über $K$. Mit $V^*$ bezeichnen wir den Dualraum von $V$.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$V^* \times W \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W), \quad (\varphi, w) \mapsto (v \mapsto \varphi(v)w)$$

bilinear ist und daher eine Abbildung $\Phi\colon V^* \otimes_K W \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ induziert.

b) Seien nun $V$ und $W$ endlich-dimensional. Zeige, dass die Abbildung $\Phi$ aus Teil a) ein Isomorphismus ist.

c) Sei nun $V = W = K[X]$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $K$. Ist die Abbildung $\Phi$ auch in diesem Fall ein Isomorphismus?

## Aufgabe 7

Sei $K$ ein Körper und sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Sei $\beta\colon V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform.

Es sei

$$V^\perp = \{v \in V;\ \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Zeige, dass $\beta$ auf $V/V^\perp$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform induziert.