Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II
13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\beta\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform und $G \subseteq GL(V)$ eine endliche Untergruppe. Zeige:

a) Durch
$$\beta_G(v, w) = \frac{1}{\#G} \cdot \sum_{g \in G} \beta(g(v), g(w))$$
wird eine Bilinearform auf V definiert, die symmetrisch (bzw. ein Skalarprodukt) ist, wenn β symmetrisch (bzw. ein Skalarprodukt) ist.

b) Es gilt $G \subseteq O(V, \beta_G)$.

c) Sei β_G nicht konstant Null. Ferner gelte:

i) Die Darstellung von G auf V ist irreduzibel.

ii) Es existiert ein $g \in G$ mit $\mathrm{rg}(\mathrm{id}_V - g) = 1$.

Zeige, dass β_G nicht ausgeartet ist, dass β_G symmetrisch oder antisymmetrisch ist, und dass für jede andere G-invariante Bilinearform β' ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit
$$\beta'(v, w) = a\beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass β_G nicht ausgeartet ist. Folgere, dass ein $f \in \mathrm{End}(V)$ existiert, so dass $\beta_G(y, x) = \beta_G(f(x), y))$ und $f \circ g = g \circ f$ für alle $g \in G$. Benutze i) und ii) um zu zeigen, dass f eine Homothetie ist und folgere, dass β_G symmetrisch oder antisymmetrisch ist. Benutze schließlich ein ähnliches Vorgehen für die letzte Behauptung.

Aufgabe 2

Sei $n \geq 1$, $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, sei $A \in O(n, \mathbb{R})$ die Drehung um den Winkel α und sei C_n die von A erzeugte Untergruppe. Zeige, dass C_n genau n nicht zueinander äquivalente irreduzible komplexe Darstellungen besitzt.

Aufgabe 3

Sei G die symmetrische Gruppe S_3. Wir betrachten im folgenden stets *komplexe* Darstellungen von G.

a) Zeige, dass G genau eine nichttriviale Darstellung vom Grad 1 hat; diese bezeichnet man als die alternierende Darstellung.

b) Die Gruppe G operiert auf $\mathbb{C}^3$ durch Vertauschen der Koordinaten. Zeige, dass diese Operation die direkte Summe der trivialen Darstellung und einer irreduziblen zweidimensionalen Darstellung ist. Diese zweidimensionale Darstellung heißt die Standarddarstellung der Gruppe S_3.

c) Sei $\zeta_3 = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$. Seien $\sigma = (12), \tau = (123) \in G$. Sei $\rho\colon G \longrightarrow GL(V)$ die Standarddarstellung. Zeige, dass V eine Basis b_1, b_2 besitzt, so dass

$$\rho(\tau)(b_1) = \zeta_3 b_1, \quad \rho(\tau)(b_2) = \zeta_3^2 b_2, \quad \rho(\sigma)(b_1) = b_2.$$

d) Zeige, dass G genau drei irreduzible Darstellungen besitzt: die triviale Darstellung, die alternierende Darstellung und die Standarddarstellung.

Hinweis: Eine mögliche Vorgehensweise ist die folgende: Sei $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ eine beliebige Darstellung. Dann zerfällt W in Eigenräume von τ, und die Eigenwerte sind Potenzen von ζ_3. Ist v ein Eigenvektor von τ zum Eigenwert ζ_3^i, so ist $\sigma(v)$ ein Eigenvektor von τ zum Eigenwert ζ_3^{2i}. Also erzeugen v und $\sigma(v)$ einen G-invarianten Unterraum von V. Ist dieser zweidimensional, so kann man Teil c) anwenden.