

## Übungen zur Algebraischen Geometrie

*Blatt 12, Abgabe am 25.01.2006*

### Aufgabe 45

Gib ein Beispiel eines Schemas  $X$  an, in dem ein Punkt  $x_0 \in X$  existiert, so dass die Halme  $\mathcal{O}_{X,x}$ ,  $x \neq x_0$  sämtlich reduziert sind, der Halm  $\mathcal{O}_{X,x_0}$  jedoch nicht.

*Hinweis:* Betrachten zum Beispiel in der affinen Ebene den schema-theoretischen Durchschnitt des Achsenkreuzes mit einer verdickten Koordinatenachse.

### Aufgabe 46

a) Zeige: ist  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus von Schemata, und ist  $X$  reduziert, so faktorisiert  $f$  über  $Y_{\text{red}} \rightarrow Y$ . Insbesondere induziert jeder Morphismus  $X \rightarrow Y$  einen natürlichen Morphismus  $X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$ , so dass die Zuordnung  $X \mapsto X_{\text{red}}$  ein Funktor ist.

b) Gib ein Beispiel eines Morphismus  $X \rightarrow Y$  an, derart dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{\text{red}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_{\text{red}} & \longrightarrow & Y \end{array}$$

nicht kartesisch ist.

### Aufgabe 47

a) Sei  $X$  ein integrales Schema und sei  $\eta \in X$  der generische Punkt. Zeige, dass der Halm  $\mathcal{O}_{X,\eta}$  ein Körper ist. Dieser Körper heißt der (rationale) Funktionenkörper von  $X$  und wird mit  $K(X)$  bezeichnet.

b) Sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus von integren Schemata, der dominant ist, d. h. dass  $f(X)$  dicht in  $Y$  ist. Zeige, dass  $f$  eine Inklusion  $K(Y) \rightarrow K(X)$  der Funktionenkörper induziert.

c) Sei  $X$  ein integrales Schema,  $x \in X$ . Zeige, dass der natürliche Morphismus  $\text{Spec } \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow X$  dominant ist, und dass wir so  $\mathcal{O}_{X,x}$  auf natürliche Weise als Unterring von  $K(X)$  auffassen können. Ist nun  $U \subseteq X$  eine nichtleere, offene Teilmenge, so ist  $\eta \in U$  und wir erhalten eine Abbildung  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow K(X)$ . Zeige, dass diese Abbildung injektiv ist, und dass gilt:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$

### Aufgabe 48

Sei  $\mathcal{P}$  eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata, für die gilt:

- i) Jede abgeschlossene Immersion hat die Eigenschaft  $\mathcal{P}$ .
- ii) Die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  ist stabil unter Komposition.
- iii) Die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  ist stabil unter Basiswechsel.

Zeige, dass dann gilt:

- a) Sind  $X_1 \rightarrow Y_1, X_2 \rightarrow Y_2$  Morphismen mit  $\mathcal{P}$ , so hat auch der induzierte Morphismus  $X_1 \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X_2 \rightarrow Y_1 \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} Y_2$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$ .
- b) Sind  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  Morphismen, hat  $g \circ f$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  und ist  $g$  separiert, so hat  $f$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$ . (*Hinweis:* Der Graph-Morphismus  $\Gamma_f: X \rightarrow X \times_Z Y$  entsteht durch Basiswechsel aus  $\Delta_{Y/Z}$ .)
- c) Ist  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus mit  $\mathcal{P}$ , so hat auch  $f_{\text{red}}: X_{\text{red}} \rightarrow Y_{\text{red}}$  die Eigenschaft  $\mathcal{P}$ .