

Gruppen, Ringe, Moduln

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Seien A , B und C endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring mit $A \oplus B \cong C \oplus B$. Zeigen Sie, daß $A \cong C$.

Aufgabe 2.

Sei R ein Hauptidealring, $M \cong R^n$ und N ein R -Untermodul von M vom Rang m . Dann besagt der Elementarteilersatz, daß es $a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_m$ in R gibt und eine Basis v_1, \dots, v_n von M , so daß die $a_i v_i$ für $i = 1, \dots, m$ eine Basis von N bilden. Zeigen Sie, daß a_1, \dots, a_m durch M und N eindeutig bestimmt sind.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung bewiesene Eindeutigkeitsaussage.

Aufgabe 3.

a) Berechnen Sie die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 10 \\ 2 & 2 & 10 & -10 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{Z}).$$

b) Sei M_1 der Untermodul des \mathbb{Z} -Moduls \mathbb{Z}^3 , der von den Elementen $(0, 0, 6)$, $(2, 0, 0)$ und $(0, 5, 0)$ erzeugt wird. Berechnen Sie $a_1 \mid a_2 \mid a_3 \in \mathbb{Z}$ und eine Basis v_1, v_2, v_3 von \mathbb{Z}^3 , für die die $a_i v_i$ eine Basis von M_1 bilden.

c) Sei M_2 der Untermodul des $\mathbb{R}[X]$ -Moduls $\mathbb{R}[X]^2$, der von den Elementen $(X, 1)$ und $(0, X)$ erzeugt wird. Berechnen Sie $a_1 \mid a_2 \in \mathbb{R}[X]$ und eine Basis v_1, v_2 von $\mathbb{R}[X]^2$, für die die $a_i v_i$ eine Basis von M_2 bilden.

Aufgabe 4.

Sei R ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K . Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M ein endlich erzeugter R -Untermodul von K^n , so daß K^n als Vektorraum von M erzeugt wird. Zeigen Sie, daß M ein freier R -Modul vom Rang n ist und daß jede Basis von M als R -Modul auch eine Basis von K^n als K -Vektorraum ist.

Abgabe: Montag, 7. Januar 2008.

Ein frohes Weihnachtsfest!